8 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В замкнутых автоматических системах регулирования при появлении возмущающих или изменении управляющих воздействий в общем случае возникают колебания регулируемой величины. Эти колебания могут быть затухающими, незатухающими и расходящимися (переходные процессы могут быть и неколебательными – апериодическими, стремящимися к положению равновесия или уходящими от него). Ясно, что системы, в которых возникают расходящиеся колебания регулируемой величины, неработоспособны. При их применении нарушается ход технологического процесса, что может привести к авариям.

Для описания характеристик отмеченных особенностей введено понятие «устойчивость». Система автоматического управления называется устойчивой, если она, будучи выведенной из состояния равновесия, после снятия возмущающего воздействия возвращается к прежнему положению равновесия или в конечную область, примыкающую к этому положению. Устойчивость – это внутреннее свойство системы регулирования, для линейных систем не зависящее от внешних воздействий.

Простейшей аналогией устойчивой и неустойчивой систем могут служить системы из вогнутой и выпуклой поверхности и шарика. Выходной величиной системы является отклонение шарика от положения равновесия. На вогнутой поверхности (рисунок 8.1, а) шарик, смещенный в сторону какой-то силой, после устранения этой силы самопроизвольно возвращается в нижнюю точку, т. е. в прежнее положение равновесия. Если трение невелико, то шарик совершит несколько колебаний около положения равновесия (кривая 1). При большом трении шарик переместится в положение равновесия без колебаний – апериодический процесс (кривая 2). При очень большом трении шарик может не дойти до нижней точки (кривая 5), но возвратится в конечную область, примыкающую к положению равновесия. Во всех трех случаях налицо устойчивая система. Подобные переходные процессы (затухающие колебательные и апериодические) возникают и в устойчивых системах автоматического регулирования.

На выпуклой поверхности (рисунок 8.1, б) шарик, смещенный в сторону, не возвращается в положение равновесия (кривая 4) – система неустойчивая. В таких системах могут возникать переходные процессы как апериодические, так и в виде расходящихся колебаний (кривая 5).

Переход от устойчивой системы к неустойчивой и наоборот характеризуется возникновением незатухающих колебаний выходной величины – система находится на границе устойчивости.

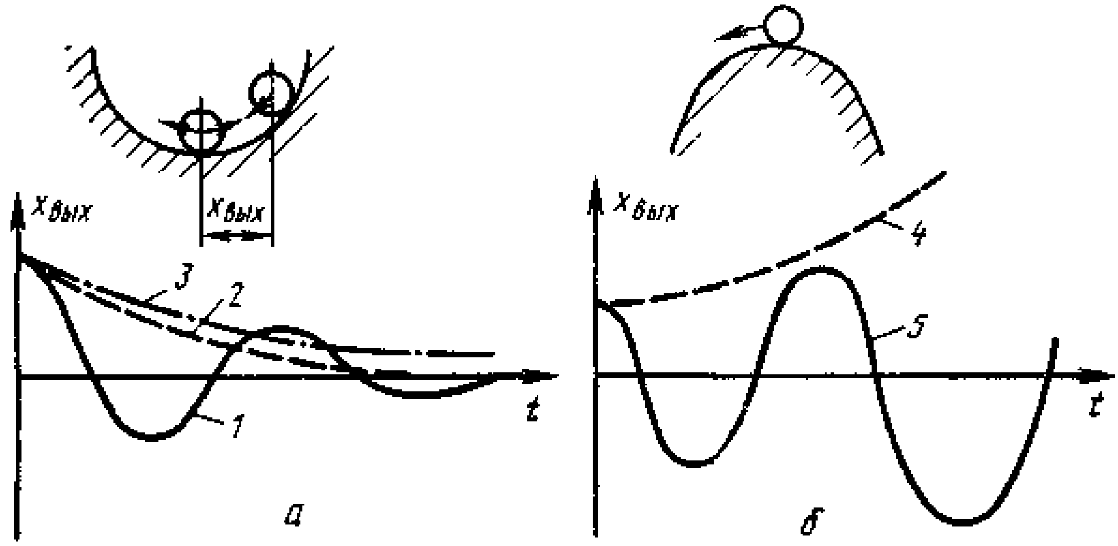

Рисунок 8.1 – Переходные процессы в устойчивой (а) и неустойчивой (б) системах

Возникновение незатухающих колебаний регулируемой величины в линейных системах – чисто теоретическая ситуация и реальные системы автоматического регулирования в таком режиме работать не могут (работа нелинейных систем в автоколебательном режиме здесь не рассматривается).

При определении устойчивости системы рассматривается ее свободное поведение при равенстве нулю возмущающих и входных воздействий. Поэтому движение системы определяется однородным дифференциальным уравнением замкнутой системы

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = 0, \tag{8.1}$$

характеристическое уравнение, которого имеет вид

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = 0. \tag{8.2}$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (8.2) может быть представлено следующим образом

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k t}, \tag{8.3}$$

где C_k – константы интегрирования; p_k – корни характеристического уравнения.

Если корни характеристического уравнения действительные, то вид уравнения (8.2) остается неизменным. Если характеристическое уравнение (8.2) имеет комплексные корни, то каждая пара сопряженных комплексных корней $p_k = \alpha_k \pm j\omega_k$ дает в составе решения уравнения (8.3) свою составляющую:

$$e^{\alpha_k t}(C_k Cos\omega_k t + D_k Sin\omega_k t), \tag{8.4}$$

Из определения устойчивости следует, что если прежнее положение равновесия и его конечные окрестности принять за нуль, то у устойчивых систем выходная величина с течением времени должна стремиться к нулю: система возвращается в положение равновесия. Для этого необходимо и достаточно, чтобы все слагаемые решения уравнения (8.1) с течением времени стремились к нулю, что достигается, если действительные корни уравнения (8.2) отрицательны, а комплексные корни имеют отрицательную действительную часть. Наличие даже одного положительного действительного корня или пары комплексных корней с положительной действительной частью приводит к тому, что соответствующее слагаемое решения уравнения (8.1) с течением времени неограниченно возрастает, т. е. выходная величина системы не возвращается к первоначальному значению – система неустойчива.

Изображая корни характеристического уравнения замкнутой системы (8.3) на комплексной плоскости (рисунок 8.2), следует отметить, что система автоматического регулирования устойчива, если все корни характеристического уравнения системы левые, т. е. лежат в левой полуплоскости и все они действительные отрицательные или комплексные с отрицательной действительной частью. Наличие хотя бы одного правого корня (в правой полуплоскости) говорит о неустойчивости системы.

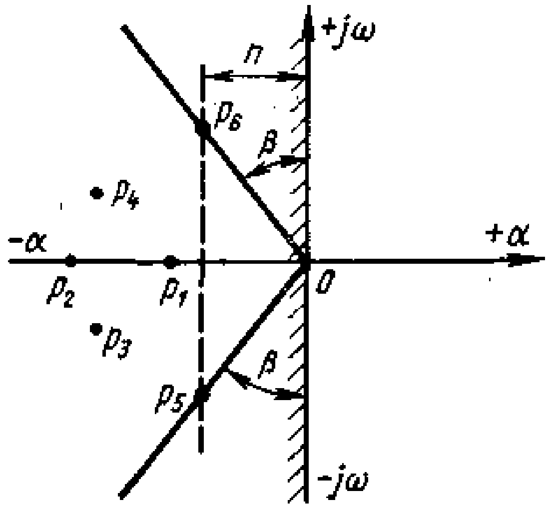

Рисунок 8.2 – Расположение корней характеристического уравнения устойчивой системы на комплексной плоскости

Границей, разделяющей на комплексной плоскости зоны расположения корней характеристического уравнения, обеспечивающих устойчивость или неустойчивость системы, служит мнимая ось. Если хотя бы два корня характеристического уравнения чисто мнимые (лежат в комплексной плоскости на мнимой оси) $\pm j\omega$, а остальные имеют отрицательные действительные части, то в системе возникают незатухающие колебания с частотой ω. Такая система находится на границе устойчивости. Система будет на границе устойчивости и при наличии хотя бы одного нулевого корня ($p_k = 0$) и остальных корней с отрицательными действительными частями. Такую систему называют нейтрально устойчивой. На плоскости границу устойчивости принято обозначать штриховкой, направленной в сторону устойчивой зоны.

Таким образом, для определения устойчивости необходимо решить характеристическое уравнение замкнутой автоматической системы регулирования и проанализировать расположение полученных корней на комплексной плоскости.

Практически все реальные системы автоматического регулирования не являются строго линейными, а их линейные дифференциальные уравнения получают путем линеаризации. При линеаризации с помощью разложения в ряд Тейлора отбрасывают члены второго и высших порядков малости, которые для малых отклонений считаются пренебрежимо малыми.

Существуют разработанные А. М. Ляпуновым положения (приведенные здесь без доказательства), которые позволяют распространить рассмотренные способы определения устойчивости по корням характеристического уравнения на реальные системы:

– если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными действительными частями, то реальная система также будет устойчивой, т.е. учет отброшенных малых нелинейных членов не может нарушить ее устойчивость;

– если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью, то реальная система также будет неустойчивой, т.е. учет отброшенных малых нелинейных членов не может сделать ее устойчивой.

– при наличии нулевых и чисто мнимых корней характеристического уравнения поведение реальной системы не всегда (даже качественно) определяется ее линеаризованным уравнением, т.е. учет даже малых нелинейных членов может коренным образом изменить характер переходного процесса, сделав систему устойчивой или неустойчивой.

8.1 Критерии устойчивости системы управления

Алгебраические критерии. Решение характеристических уравнений высоких степеней вызывает определенные трудности, и поэтому существуют методы определения устойчивости системы по значениям коэффициентов уравнения или по частотным характеристикам системы, называемым критериями устойчивости. Рассмотрим без доказательства некоторые из них.

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица. Иногда его называют критерием Гауса-Гурвица, так как эти ученые независимо друг от друга сформулировали критерии устойчивости для систем, описываемых линейными уравнениями любого порядка. Критерий дается в форме, предложенной Гурвицем. Формулировка критерия: система автоматического регулирования устойчива, если все коэффициенты однородного дифференциального уравнения замкнутой системы имеют одинаковый знак, а все определители Гурвица больше нуля. Для коэффициентов характеристического уравнения составляют квадратную матрицу, содержащую n строк и m столбцов. По диагонали от левого верхнего до правого нижнего углов выписывают все коэффициенты от a_{n-1} до a_0. Каждую строчку дополняют коэффициентами с убывающими слева направо индексами так, чтобы чередовались строки с нечетными и четными индексами. В случае отсутствия данного коэффициента и если его номер больше n или меньше нуля, на его месте проставляют нуль.

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ - & - & - & \dots & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}. \tag{8.5}$$

Определители Гурвица составляют по следующему правилу (в соответствии с пунктирными линиями):

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0; \tag{8.6}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0; \tag{8.7}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0. \qquad (8.8)$$

Последний (n-ый) определитель включает всю матрицу (8.5), но он может быть выражен через предпоследний определитель Гурвица (Δ_{n-1}):

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1} > 0. \qquad (8.9)$$

Так как в устойчивой системе $\Delta_{n-1} > 0$, то положительность последнего определителя сводится к положительности свободного члена характеристического уравнения a_0.

Условия нахождения системы на границе устойчивости можно получить, приравнивая нулю последний определитель ($\Delta_n = 0$) при положительности всех остальных определителей. Как видно из формулы (8.9), это условие распадается на два: $a_0 = 0$ и $\Delta_{n-1} = 0$. Первое условие соответствует границе устойчивости первого типа (нулевой корень характеристического уравнения), а второе – границе устойчивости второго типа (колебательная граница).

Для уравнений высоких порядков вычисление определителей Гурвица становится достаточно трудоемким, поэтому использование критерия практически ограничивается уравнениями четвертого-пятого порядков. Другим недостатком критерия Гурвица является то, что при неустойчивости системы он не позволяет определить, как нужно изменить параметры системы, чтобы сделать ее устойчивой.

Пример. Рассмотрим характеристическое уравнение 3-й степени

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Составим матрицу коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

При положительности a_0 устойчивость системы обеспечивается положительностью

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} > 0,$$

откуда $(a_2 a_1/a_0 a_3) > 1$.

Частотные критерии устойчивости. Рассмотрим левую часть характеристического уравнения замкнутой автоматической системы управления – характеристический полином:

$$Q(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 . \qquad (8.10)$$

Подставим в этот полином чисто мнимое значение $p = j\omega$. При подстановке получим характеристический комплекс

$$Q(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + ... + a_1 (j\omega) + a_0, \qquad (8.11)$$

называемый вектором Михайлова. Если частоте ω придавать значение в пределах от 0 до ∞, то вектор (8.11) будет изменяться по величине и направлению и его конец опишет на комплексной плоскости кривую, которую называют годографом Михайлова (рисунок 8.3). Формулировка критерия: система автоматического регулирования устойчива, если годограф Михайлова начинается при $\omega = 0$ на положительной действительной полуоси и с увеличением частоты от 0 до ∞ проходит в положительном направлении (против часовой стрелки) последовательно, нигде не обращаясь в нуль, n квадрантов (n – порядок дифференциального уравнения системы).

Любое отклонение от указанного правила говорит о неустойчивости системы. На рисунке 8.3 кривая 1 соответствует устойчивой системе с уравнением 3-го порядка, кривая 2 – то же, но 4-го порядка, кривая 3 соответствует неустойчивой системе, кривая 4 – системе, находящейся на границе устойчивости, когда годограф Михайлова проходит через 0.

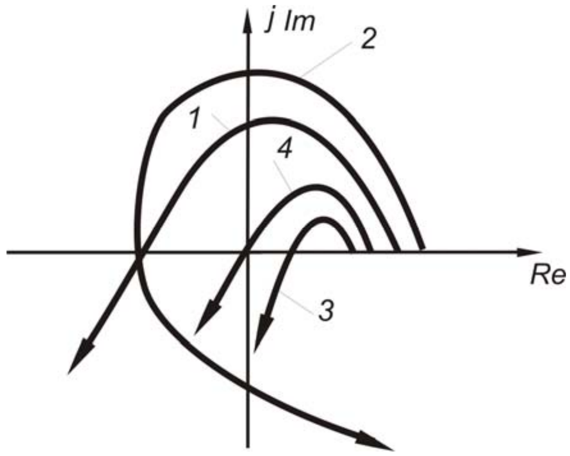

Рисунок 8.3 – Частотный критерий устойчивости Михайлова:
1 и 2 –устойчивая система; 3 –неустойчивая система; 4 –система на границе устойчивости

Преимуществами частотного критерия Найквиста перед критерием Михайлова является то, что он позволяет судить об устойчивости замкнутой автоматической системы регулирования по характеристикам разомкнутой системы и может быть применен для систем с транспортным запаздыванием без поправок и дополнений.

Если в выражение передаточной функции разомкнутой системы подставить p = jω, то получим АФХ разомкнутой системы n-ого порядка:

$$W_p(j\omega) = \prod_{i=1}^{n} W_i(j\omega), \qquad (8.12)$$

которая строится на комплексной плоскости при изменении частоты со от 0 до ∞.

Формулировка критерия: система автоматического регулирования, устойчивая или нейтрально устойчивая в разомкнутом состоянии, устойчива в замкнутом состоянии, если АФХ разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до ∞ не охватывает на комплексной плоскости точку с координатами (-1;j0) – рисунок 8.4. Для неустойчивой в разомкнутом состоянии системы формулировка критерия несколько сложнее и здесь не рассматривается.

Если АФХ разомкнутой системы проходит через точку с координатами (-1; j0), как показано на рисунке 8.4 (кривая 2), то система находится на колебательной границе устойчивости, и в ней возникают незатухающие колебания выходной величины. Если АФХ разомкнутой системы охватывает точку (-1; j0), то замкнутая система неустойчива (рисунок 8.4, кривая 3).

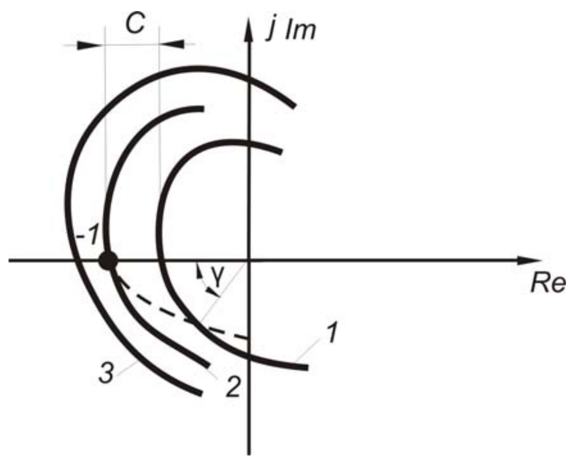

Рисунок 8.4 – Частотный критерий устойчивости Найквиста:
1 – устойчивая система; 2 – система на границе устойчивости; 3 –неустойчивая система

Среди частотных критериев устойчивости систем автоматического регулирования следует выделить, критерий, базирующийся на анализе ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы. Он позволяет наглядными средствами графически с помощью асимптот произвести оценку устойчивости систем достаточно высокого порядка. Формулировка этого критерия требует большого иллюстративного материала и здесь из-за ограниченного объема курса не рассматривается.

При расчете и анализе систем автоматического регулирования бывает необходимо исследовать влияние ее параметров на устойчивость. Для решения этой задачи строят область устойчивости, т. е. определяют такие области значений параметров, при которых система оказывается устойчивой. Различают построения области устойчивости в плоскости одного параметра (второй координатой служит частота колебаний) и (что наиболее часто) в плоскости двух параметров. Построение в объеме трех параметров применяют редко из-за сложности геометрического представления границ (поверхностей) устойчивости. Примером области устойчивости служит левая полуплоскость в комплексной плоскости корней характеристического уравнения.

Для выделения областей устойчивости необходимо построение границ устойчивости первого (нулевой корень характеристического уравнения) и второго (чисто мнимые корни) типов. Однако часто бывает достаточным построение только границы устойчивости второго типа (колебательной). Для расчета колебательной границы устойчивости можно использовать различные критерии устойчивости.

Для систем с уравнениями не выше четвертого-пятого порядков возможно применение критерия Гурвица. Колебательной границе устойчивости соответствует равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица ($\Delta_{n-1} = 0$).

Для уравнений любого порядка удобно использовать критерий Михайлова. Границе устойчивости соответствует в этом случае равенство нулю характеристического комплекса

$$Q(j\omega, A, B) = \mathrm{Re}(j\omega, A, B) + j\,\mathrm{Im}(j\omega, A, B) = 0, \qquad (8.13)$$

где A, B – параметры системы управления, оказывающие наиболее существенное влияние на устойчивость.

В этом случае уравнение (8.13) распадается на два уравнения:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(j\omega, A, B) = 0 \\ \mathrm{Im}(j\omega, A, B) = 0 \end{cases}. \qquad (8.14)$$

Оба эти уравнения представляют собой параметрические уравнения колебательной границы устойчивости в плоскости с координатами A и B при условии отрицательности действительных частей всех других корней, кроме чисто мнимых. Каждой точке на границе устойчивости соответствует свое значение чисто мнимых корней и, следовательно, своя частота колебаний выходной величины. На рисунке 8.5 приведен пример границы области устойчивости ПИ-регулятора в плоскости настроек его параметров: $k_р$ – коэффициента передачи и $T_и$ – постоянной интегрирования.

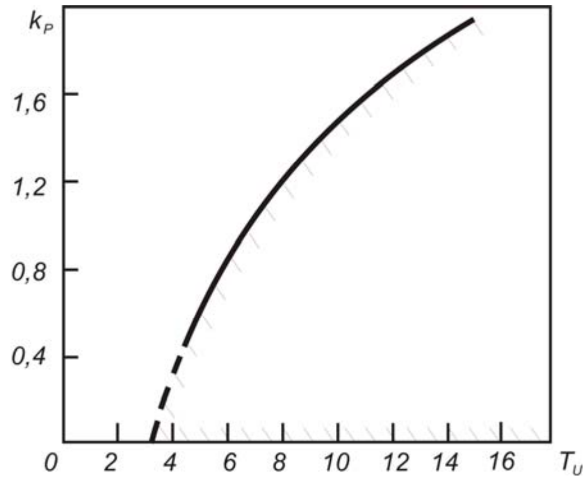

Рисунок 8.5 – Граница и область устойчивости в плоскости настроек ПИ-регулятора

Устойчивой зоной является зона ниже кривой, в ее сторону обращена штриховка. Границей устойчивости первого рода является линия $k_p = 0$, поскольку при этом характеристическое уравнение замкнутой системы имеет нулевой корень. Если колебательную границу устойчивости продолжить до оси абсцисс (пунктирная линия на рисунке 8.5), то отмеченная штриховкой область будет областью устойчивости в плоскости настроек регулятора.

8.2 Оценка устойчивости системы управления второго порядка

Рассмотрим пример термического агрегата. Пусть исполнительный орган, т.е. какой-то нагреватель, обладает определенной инерционностью T_{uo}. Его передаточная функция:

$$W_{uo}(p) = \frac{k_{uo}}{T_{uo}p + 1}.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы:

$$\Phi_з(p) = \frac{k_{cy}}{(Tp+1)(T_{uo}p+1) + \dfrac{k_{cy} \cdot k_д}{k_{раз}}}.$$

В этом случае мы придем к следующему виду передаточной функции замкнутой системы:

$$\Phi_3 = \frac{Kcy}{T'^2 p^2 + \xi 3 T' p + 1},$$

где $T' = \sqrt{\dfrac{T \cdot Tuo}{1 + K\text{раз}}}$, $\xi = \dfrac{T + Tuo}{2(1 + K\text{раз}) \cdot T'}$, $K'cy = \dfrac{Kcy}{1 + K\text{раз}}$.

Проанализируем корни характеристического уравнения.

$$p_{1,2} = \frac{1}{T}(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}).$$

При любом значении $\xi > 1$ получаем два действительных корня, которые меньше нуля; когда $\xi < 1$, то получаем два комплексно-сопряженных числа, у которых действительная часть всегда < 0, т.е. система устойчива. В этом случае вид переходного процесса для комплексно-сопряженных корней записывается следующим образом:

$$t_{\text{вых}}(\mathrm{t}) = A[1 - e^{-\frac{\xi}{\mathrm{T}} t} \cdot \sin(\beta t + \varphi)],$$

где $\beta = \dfrac{1}{T}\sqrt{\xi^2 - 1}$, $\varphi = arctg \dfrac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\lambda}$, ξ – степень затухания, А – установившееся значение температуры при выбранных управляющих воздействиях.

8.3 Контрольные вопросы

1. Что такое устойчивость системы управления?
2. Перечислите основные критерии устойчивости системы управления.
3. Что такое годограф Михайлова?
4. Как формулируется критерий устойчивости Гурвица?
5. Как формулируется критерий устойчивости Михайлова?
5. Как формулируется критерий устойчивости Найквиста?