6 ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

При решении задач анализа и синтеза линейных САУ целесообразно представлять их в виде совокупности соединенных между собой нескольких несложных элементов с определенными динамическими свойствами. В результате такого представления получают структурную схему реального элемента или САУ, которая достаточно точно и полно описывает их динамические свойства.

С точки зрения динамических свойств объекты управления в теории автоматического регулирования принято классифицировать по характеру переходного процесса, возникающего при подаче на вход звена единичного ступенчатого воздействия. При этом переходный процесс определяется только видом дифференциального уравнения, описывающего поведение звена. Реальные элементы, составляющие САУ, могут иметь разнообразную физическую основу (тепловую, механическую, электрическую и т.д.) и конкретное исполнение (нагревательное устройство, гидро- или пневмопривод, электрический двигатель и т.д.). Однако они описываются одним и тем же дифференциальным уравнением, а, следовательно, обладают идентичными динамическими свойствами. Исходя из идентичности динамических свойств, реальные элементы можно отнести к определенному типу звеньев, что, в конечном счете, позволяет свести все многообразие реальных элементов САУ к небольшому числу так называемых элементарных звеньев.

Таким образом, с точки зрения математического описания переходных процессов реальный элемент и САУ могут быть представлены в виде отдельного элементарного звена или их комбинаций. Элементарным звеном называется такое звено, которое невозможно подразделить на еще более простые звенья. Элементарные звенья характеризуются следующими общими свойствами:

а) имеют одну входную и одну выходную величину;

б) описываются дифференциальным уравнением не выше 2-гопорядка;

в) обладают детектирующим свойством, т. е. пропускают сигнал только в одном направлении.

С методической точки зрения представляет интерес оценить влияние коэффициентов и вида характеристического уравнения на тип передаточных функций и оригиналы выходных величин или вид переходных характеристик. Для этого достаточно рассмотреть различные варианты дифференциальных уравнений, которые могут быть получены из уравнения

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_n x^{(n)} + b_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + b_1 x' + b_0 x$$

путем варьирования коэффициентов. Ограничимся случаями с $b_1 = 0$.

1. Пусть в дифференциальном уравнении $a_2 = a_1 = 0$, тогда уравнение состояния объекта вырождается к виду

$$a_0 y(t) = b_0 x(t), \tag{6.1}$$

т. е. выходная величина пропорциональна входной.

Из уравнения (6.1) следует, что выходная величина мгновенно повторяет все изменения входной величины, не только в установившемся режиме, но и в переходных процессах. В связи с этим звено называют безынерционным.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (6.1), найдем передаточную функцию безынерционного звена:

$$W(p) = {}^{b_0}\!/_{a_0} = k, \tag{6.2}$$

где k – коэффициент передачи, имеющий размерность: единица измерения выходной величины, деленная на единицу измерения входной величины.

Переходная функция h(t) звена примет вид

$$h(t) = k1(t). \tag{6.3}$$

Графически переходная функция представляет собой ступенчатую функцию (рисунок 6.1, а).

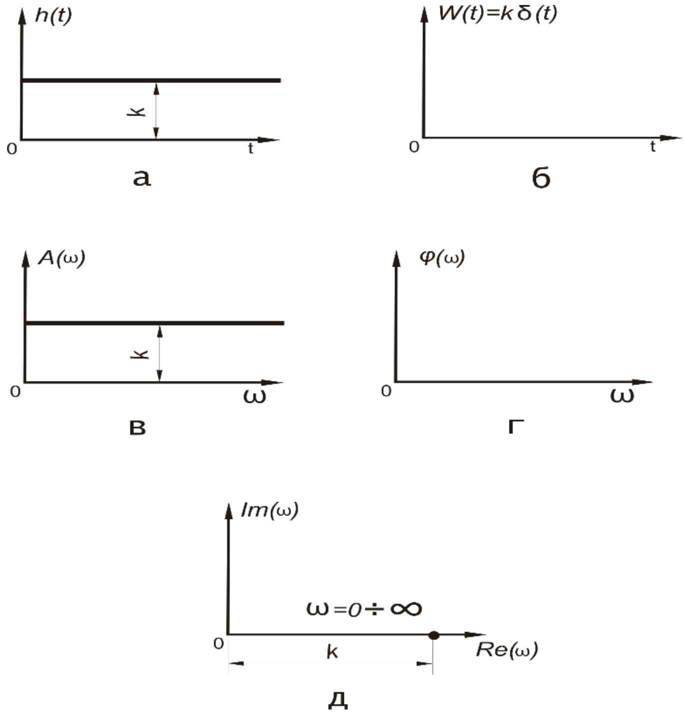

Рисунок 6.1 – Временные и частотные характеристики безынерционного звена: а – переходная функция h(t); б – АЧХ; в – ФЧХ

Амплитудно-фазовую характеристику звена получают из уравнения (6.2):

$$W(j\omega) = k. \tag{6.4}$$

АФХ изображается на комплексной плоскости точкой на положительной действительной оси, удаленной от начала координат на расстояние k. Действительная и мнимая частотные характеристики звена равны

$$\mathrm{Re}(\omega) = k; \qquad \mathrm{Im}(\omega) = 0. \tag{6.5}$$

Из выражения (6.5) следует, что АЧХ и ФЧХ звена соответственно равны:

$$A(\omega) = k; \qquad \varphi(\omega) = 0. \tag{6.6}$$

При изменении частоты от 0 до АЧХ пропорционального звена не меняется (рисунок 6.1, б), что свидетельствует о пропускании входного сигнала любой частоты без искажений. ФЧХ звена тождественно равна нулю для всех частот (рисунок 6.1, в), что означает синфазность (совпадение по фазе) выходных колебаний с входными.

Примерами конструктивного выполнения безынерционного звена могут быть: механический редуктор, рычажное сочленение, электронные усилители и т. д. Приведенные технические устройства могут относиться к категории безынерционных звеньев приближенно лишь для некоторого диапазона частот.

2. Пусть в дифференциальном уравнении $a_2=a_0=0$, тогда уравнение состояния объекта вырождается к виду

$$a_1 y^{(1)}(t) = b_0 x(t), \tag{6.7}$$

Очевидно, звено является интегрирующим, поскольку его выходная величина пропорциональна интегралу по времени от входной величины и описывается уравнением

$$y(t) = \frac{b_0}{a_1} \int x(t) dt, \tag{6.8}$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (6.7), найдем передаточную функцию идеального интегрирующего звена:

$$W(p) = \frac{b_0}{a_1 p} = \frac{k}{p}, \tag{6.9}$$

где k – коэффициент передачи звена. Его размерность: единица скорости изменения выходной величины, деленная на единицу измерения входной величины.

Переходную функцию идеального интегрирующего звена получают из уравнения (6.8) при x(t) = 1(t):

$$h(t) = k \int 1(t) dt = kt + C, \tag{6.10}$$

где C – константа интегрирования, равная нулю для нулевых начальных условий.

Скорость изменения выходной величины при x(t) = 1(t) численно равна k. График переходной функции представляет собой прямую линию (рисунок 6.2, а) с углом наклона α= arctg k.

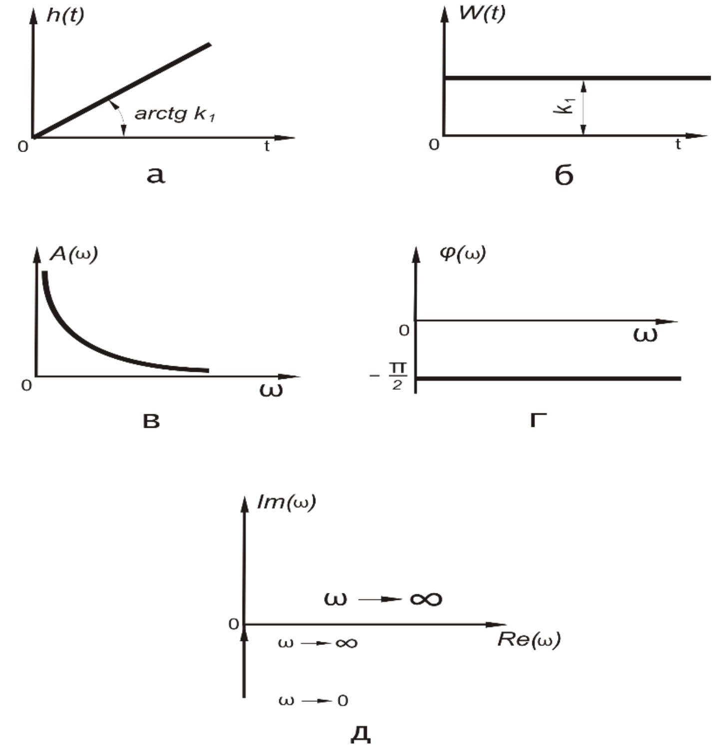

Рисунок 6.2 – Временные и частотные характеристики идеального интегрирующего звена:

а – переходная функция; б – АЧХ; в – ФЧХ;

При ступенчатом входном воздействии, отличном от 1(t), x(t)=A_1(t), скорость изменения выходной величины изменяется в А раз.

Из анализа (6.10) следует, что одному и тому же установившемуся значению входной величины могут соответствовать различные значения выходной величины. Здесь сказывается значение константа интегрирования. На этом основании интегрирующее звено называют астатическим. Кроме того, при уменьшении входной величины до нуля выходная величина интегрирующего звена остается неизменной и не стремится к нулю, как в пропорциональном звене.

Заменяя p на jω в уравнении (6.9), получают АФХ интегрирующего звена:

$$W(j\omega) = \frac{b_0}{a_1(j\omega)} = -\frac{jk}{\omega}. \qquad (6.11)$$

Из уравнения (6.11) следует, что действительная частотная характеристика равна нулю, т.е. Re(ω) = 0, а мнимая частотная характеристика совпадает с АЧХ:

$$A(\omega) = \mathrm{Im}(\omega) = k\omega\,. \qquad (6.12)$$

ФЧХ звена равна $-\pi/2$ радиан, так как

$$\varphi(\omega) = arctg(\mathrm{Im}(\omega) \big/ \mathrm{Re}(\omega)) = -arctg(\infty) = -\frac{\pi}{2}\,. \qquad (6.13)$$

Таким образом, при изменении частоты от 0 до $+\infty$ АЧХ уменьшается от ∞ до 0, а выходные колебания отстают на угол $\pi/2$ для всех частот (рисунок 6.2, б и в).

Примерами элементов, динамические свойства которых эквивалентны в некотором приближении свойствам идеального интегрирующего звена, являются: электродвигатель постоянного тока, если входом его является напряжение на якоре, а выходом – угол его поворота.

Реальные интегрирующие звенья обычно обладают заметной инерционностью. Такие звенья не относятся к элементарным, так как могут быть представлены более простыми звеньями.

3. Пусть в дифференциальном уравнении $a_2=0$, тогда уравнение состояния объекта вырождается к виду

$$a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t)\,, \qquad (6.14)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (6.14), найдем передаточную функцию звена 1-го порядка:

$$W(p) = \frac{b_0}{a_1 p + a_0} = \frac{k}{Tp+1}\,, \qquad (6.15)$$

где $k=b_0/a_0$ –коэффициент передачи с размерностью: единица измерения выходной величины, деленная на единицу измерения входной величины; $T=a_1/a_0$ – постоянная времени, с.

Переходную функцию апериодического звена можно получить из формулы (6.15) как результат обратного преобразования по Лапласу, при использовании x(t) = 1(t):

$$h(t) = L^{-1}[\frac{k}{p(Tp+1)}] = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (6.16)$$

График переходной характеристики звена представлен на рисунке 6.3, а, поскольку переходный процесс носит не колебательный характер, то звено получило название апериодического.

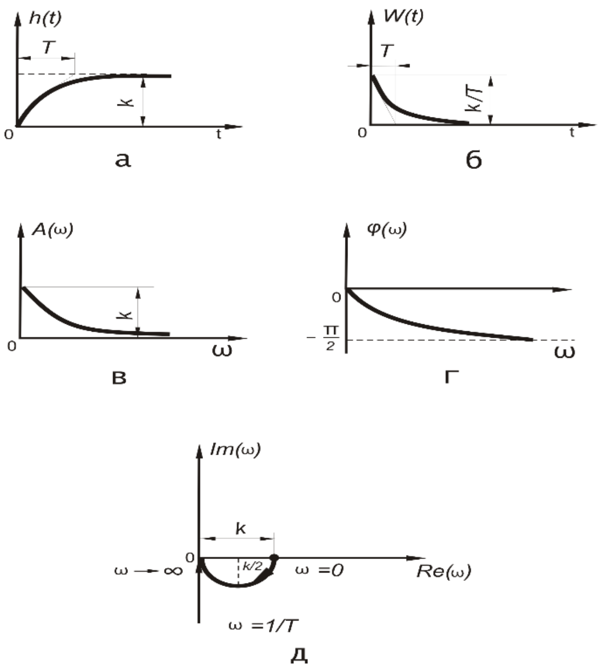

Рисунок 6.3 – Временные и частотные характеристики апериодического звена 1-го порядка:

а – переходная функция h(t); б – АЧХ, в – ФЧХ

Постоянную времени Т можно определить графически по переходной h(t) функции, проводя касательную в любой точке кривой; отрезок на асимптоте, к которой стремится h(t), от точки, соответствующей точке касания, до точки пересечения касательной с асимптотой равен постоянной времени Т. Постоянную времени можно определить как время, за которое выходная величина достигает своего установившегося значения при изменении с постоянной начальной скоростью. Чем больше Т, тем более инерционное звено. С учетом порядка уравнения (6.15) апериодическое звено называют инерционным звеном 1-го порядка.

Анализируя переходную функцию апериодического звена, можно сделать вывод, что оно обладает свойством самовыравнивания, которое выражается в том, что при постоянном значении входной величины выходная величина с течением времени стремится к установившемуся значению.

Подставляя p=jω в W (p), получаем АФХ апериодического звена:

$$W(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}=\frac{k}{(T\omega)^2+1}+j\frac{kT\omega}{(T\omega)^2+1}. \qquad (6.17)$$

На основании выражении (6.17) можно определить АЧХ и ФЧХ звена:

$$A(\omega)=k\Big/\sqrt{(T\omega)^2+1}; \qquad (6.18)$$

$$\varphi(\omega)=-arctgT\omega. \qquad (6.19)$$

При изменении частоты от 0 до ∞ АЧХ изменяется от k до 0 (рисунок 6.3, б), а сдвиг по фазе выходных колебаний относительно входных изменяется от 0 до π/2 (рисунок 6.3, в).

В качестве примеров элементов, имеющих динамические свойства апериодического звена, могут служить: электродвигатель постоянного тока, если входом его является напряжение на якоре, а выходом – скорость вращения ротора, гидравлическая емкость со свободным стоком жидкости, RC–цепочка, электрическая печь сопротивления и т.д.

4. Пусть объект управления описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$a_2y^{(2)}(t)+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=b_0x(t), \qquad (6.20)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (6.20), найдем передаточную функцию звена 2-го порядка:

$$W(p)=\frac{b_0}{a_2p^2+a_1p+a_0}=\frac{k}{T^2p^2+2\xi Tp+1}, \qquad (6.21)$$

где $k=b_0/a_0$ – коэффициент передачи с размерностью: единица измерения выходной величины, деленная на единицу измерения входной величины; $T=\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$ – постоянная времени, с, $\xi=\frac{a_1}{2\sqrt{a_0-a_2}}$ – коэффициент затухания (безразмерный коэффициент).

Характер переходного процесса зависит от значения корней характеристического уравнения

$$T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0, \tag{6.22}$$

которые очевидно в зависимости от ξ могут быть действительными, мнимыми и комплексно-сопряженными. В общем случае

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\lambda, \tag{6.23}$$

где $\alpha = \xi / T$ – постоянная времени затухания процесса; $\lambda = \sqrt{1 - \xi^2 / T}$ – собственная частота колебаний

При значении коэффициента затухания 0<ξ<1 характеристическое уравнение имеет два сопряженных корня (6.23).

В этом случае передаточную функцию (6.21) можно представить в виде

$$W(p) = \frac{k}{T^2[(p+\alpha)^2 + \lambda^2]}. \tag{6.24}$$

Используя обратное преобразование Лапласа, можно определить переходную функцию h(t):

$$h(t) = L^{-1}[W(p)\frac{1}{p}] = \frac{k}{T^2}\{\frac{1}{\alpha^2 + \lambda^2} + \frac{1}{\lambda\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} e^{-\alpha t} Sin(\lambda t - \psi)\}, \tag{6.25}$$

где $\psi = arctg(\lambda/(-\alpha))$ – начальная фаза переходного процесса.

Таким образом, переходная функция звена (рисунок 6.4, а) при 0<ξ<1 имеет колебательный затухающий характер. Звено с таким значением коэффициента затухания получило название колебательного звена.

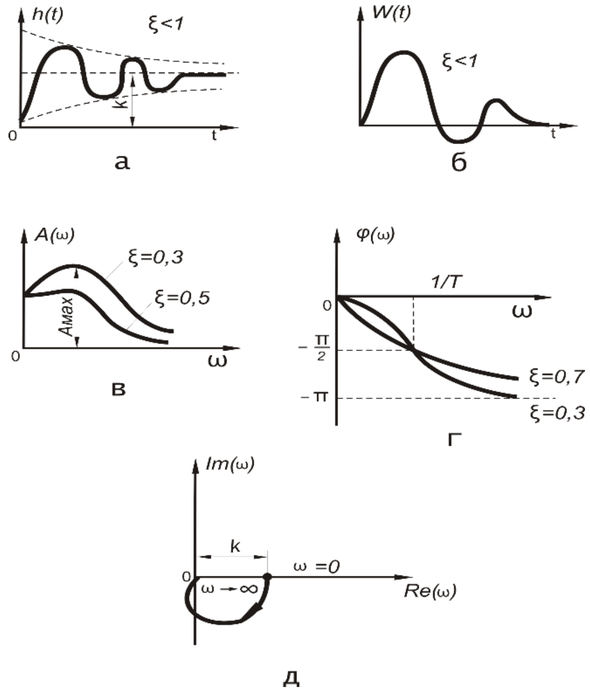

Рисунок 6.4 – Временные и частотные характеристики колебательного звена: а – переходная функция h(t); б – АЧХ; в – ФЧХ

Время затухания определяется величиной $\alpha = \xi / T$ – действительной частью корней характеристического уравнения.

При $\xi = 0$ получается частный случай колебательного звена, называемого консервативным звеном. Это идеализированное звено, соответствующее колебательному звену, работающему без потерь энергии. По сути это генератор гармонических сигналов.

Передаточная функция консервативного звена имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}. \tag{6.26}$$

Характеристическое уравнение звена имеет мнимые отрицательные корни, а, следовательно, переходная функция консервативного звена характеризуются незатухающими колебаниями.

Если $\xi > 1$, то корни характеристического уравнения (6.23) отрицательные действительные, что соответствует неколебательному (апериодическому) переходному процессу. Звено превращается в так называемое апериодическое звено 2-го порядка, характеристики которого здесь не рассматриваются, так как звено может быть разделено на более простые звенья и не является элементарным.

АФХ колебательного звена определяется выражением

$$W(j\omega)=\frac{k(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}-j\frac{2k\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}. \qquad (6.27)$$

Первое слагаемое определяет действительную частотную характеристику Re(ω), второе – мнимую частотную характеристику Im(ω).

АЧХ и ФЧХ звена соответственно равны:

$$A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}}; \qquad (6.28)$$

$$\varphi(\omega)=-arctg\frac{2\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)}. \qquad (6.29)$$

Графики частотных характеристик колебательного звена показаны на рисунке 6.4. АЧХ колебательного звена имеет максимум A_{max} при некоторой частоте ω_{max} (рисунок 6.4, б). Значение этого максимума тем больше, чем меньше коэффициент затухания ξ; при ξ=0 A_{max} равен бесконечности (консервативное звено). Таким образом, максимум характеризует колебательность звена и определяется показателем колебательности:

$$M=A_{max}/A_0, \qquad (6.30)$$

где A_0 – значение АЧХ при ω= 0. Чем больше M, тем хуже (медленнее) затухают колебания выходной величины в переходном процессе. ФЧХ колебательного звена монотонно изменяется от 0 до -π при возрастании частоты от 0 до ∞ (рисунок 6.4, г).

Примером колебательного звена может служить электродвигатель постоянного тока, если более точно рассматривать его динамику и учитывать соотношение постоянных времени, характеризующих электромеханические и электромагнитные параметры двигателя. Другими примерами могут служить груз подвешенный на пружинке, движение механических систем с учетом их упругих свойств и LRC-контур.

Вообще говоря, к числу элементарных звеньев САУ следует отнести: безынерционное, идеальное интегрирующее, апериодическое, колебательное, а также не рассмотренные выше идеальное дифференцирующее и звено чистого запаздывания.

6.1 Контрольные вопросы

1. Что такое элементарное звено?
2. Чем характеризуется безынерционное звено?
3. Чем характеризуется интегрирующее звено?
4. Чем характеризуется апериодическое звено 1-го порядка?
5. Чем характеризуется колебательное звено?
6. Чем характеризуется консервативное звено?