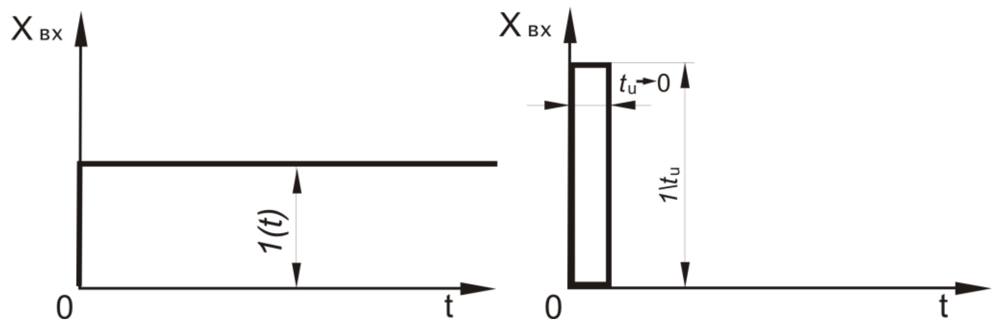
5 ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

5.1 Временные характеристики объекта управления

Зависимость выходной величины системы или элемента от времени при переходе системы из одного установившегося состояния в другое в результате изменения входного воздействия или возмущения называется переходным процессом. Его параметры определяются динамическими характеристиками объекта.

При исследовании динамических свойств системы или элемента наиболее широкое применение находят типовые воздействия в виде единичной ступенчатой и единичной импульсной функций, которые отражают существенные черты часто встречающихся реальных воздействий.



(а) (б)

Рисунок 5.1 – Единичное (а) ступенчатое и (б) импульсное воздействия

Математически единичную ступенчатую функцию (рисунок 5.1, а) можно представить в следующем виде

$$1(t) = \begin{cases} 0 & при\, t < 0 \\ 1 & при\, t \geq 0 \end{cases}. \tag{5.1}$$

Реакция системы или элемента (изменение во времени y(t)) на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях называется переходной функцией h(t). Ступенчатое воздействие является наиболее распространенным видом входного воздействия в автоматических системах. К таким видам воздействий и возмущений относятся мгновенное изменение задания автоматическому регулятору, подключение питающего напряжения к элементу, мгновенное возрастание нагрузки на валу электродвигателя и т. д.

Под единичной импульсной функцией понимается импульс, площадь которого равна единице (рисунок 5.1, б)

$$x(t) = \begin{cases} 1/t_и & при \quad t_и \ge t \ge 0 \\ 0 & при \quad t > 0 \; и \; t < 0 \end{cases}. \tag{5.2}$$

При $t_и = 0$ единичная импульсная функция превращается в некоторую математическую идеализацию, называемую дельта-функцией δ(t), значение которой равно нулю при всех значениях t, кроме t=0, когда оно равняется бесконечности. При этом ее площадь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \tag{5.3}$$

Реакция элемента или системы на входное воздействие в виде дельта-функции при нулевых начальных условиях называется импульсной переходной функцией (функцией веса или весовой функцией) w(t).

Переходная h(t) и импульсная переходная w(t) функции адекватно описывают динамические свойства линейной системы и могут быть сравнительно просто преобразованы одна в другую, поскольку единичная ступенчатая функция 1 (t) и дельта-функция δ(t) тесно связаны между собой. Действительно, дифференцируя выражение (5.3), получим

$$\delta(t) = 1'(t) \tag{5.4}$$

Из выражения (5.4) следует, что импульсная переходная функция w(t) является реакцией системы на производную единичной ступенчатой функции. На этом основании имеем

$$w(t) = h'(t) \tag{5.5}$$

или

$$\int_0^\infty w(t)dt = h(t). \tag{5.6}$$

Переходная и импульсная переходная функции относятся к динамическим характеристикам, которые определяют поведение системы во временной области.

Функция w(t) объекта связана с его передаточной функцией W(p) обратным преобразованием Лапласа. Действительно, если x(t) = δ(t), то X(p)=1 и y(t) = w(t). Тогда в соответствии с определением передаточной функции:

$$w(t) = L^{-1}[W(p)]. \tag{5.7}$$

Применяя прямое преобразование Лапласа к выражению (5.7), получаем, что передаточная функция является изображением импульсной переходной функции и связана с ней интегральным преобразованием Лапласа:

$$W(p) = L[w(t)] = \int_0^\infty w(t)e^{-pt}dt. \tag{5.8}$$

В свою очередь переходная функция h(t) элемента связана с его передаточной функцией W(p). Если x(t) = 1(t), то X(p)=1/p и y(t) = h(t). Тогда в соответствии с определением передаточной функции:

$$h(t) = L^{-1}[W(p)\frac{1}{p}]. \tag{5.9}$$

Применяя прямое преобразование Лапласа к выражению (5.9), получим

$$W(p) = pL[h(t)] = p\int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt. \tag{5.10}$$

Используя типовые воздействия, можно получить реакцию системы в переходном режиме на произвольное изменение входной величины x(t). Это возможно только в случае линейных систем, для которых справедлив принцип суперпозиции: реакция линейной системы на сумму входных воздействий, равна сумме реакций на каждое из этих воздействий. Поскольку любое входное воздействие можно представить в виде суммы типовых воздействий (единичных ступенчатых, импульсных и т.д.), то всегда можно найти реакцию системы на произвольное возмущение, зная ее реакцию на типовое воздействие.

Реакцию системы на типовое или любое произвольное воздействие можно найти путем решения дифференциального уравнения, описывающего динамику системы. Так, переходную функцию h(t) находят путем решения дифференциального уравнения при x(t) = 1(t) и нулевых начальных условиях.

Реакцию объекта на произвольное воздействие можно определить, не решая дифференциального уравнения, а используя, например переходную функцию h(t):

$$y(t) = h(t)x(0) + \int_0^t h(t-\tau)x'(\tau)d\tau\,, \qquad (5.11)$$

где x(0) = x(t) при t = 0, τ – некоторое вспомогательное переменная интегрирования.

Реакция системы y(t) на произвольное входное воздействие x(t) может быть определена как предел суммы реакций на ступенчатые воздействия высотой Δx(t+Δτ), на которые можно разложить x(t), при Δτ→0.

5.2 Частотные характеристики объекта управления

Частотные характеристики описывают вынужденные колебания на выходе системы, вызванные гармоническим воздействием на ее входе.

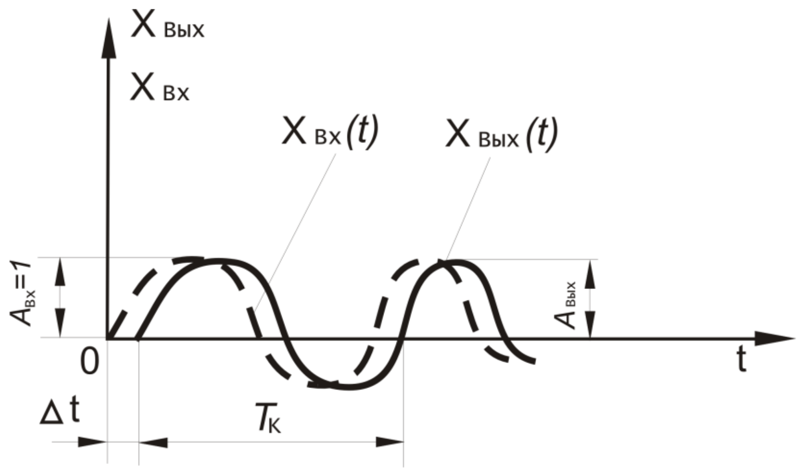


Рисунок 5.2 – Входной и выходной гармонические сигналы объекта управления

Пусть на вход объекта управления подается гармоническое воздействие, например синусоидальное, с постоянной амплитудой А и частотой ω:

$$x(t) = A_x Sin\omega t. \tag{5.12}$$

Если A_x=1, то входное воздействие называется единичным гармоническим. Здесь ω= 2π/$T_к$ – угловая частота, $T_к$ – период колебаний.

По окончании переходного процесса на выходе системы устанавливаются гармонические колебания y(t) = A_y(ω)Sin(ωt-φ(ω)) той же частоты, но с другой амплитудой A_y(ω) и сдвинутые по фазе относительно входных колебаний на угол φ(ω) (рисунок 5.2).

Угол φ(ω) рассчитывают по временному сдвигу Δt:

$$\varphi(\omega) = 2\pi(\Delta t / T_k) = \Delta t\omega. \tag{5.13}$$

Если увеличивать частоту от 0 до ∞ и определять установившиеся амплитуду и фазу выходных колебаний для разных частот, можно получить зависимость от частоты соотношения амплитуд A(ω) = A_y(ω) / A_x(ω) и сдвига фазы φ(ω)= φ_y(ω)-φ_x(ω) выходных колебаний относительно входных. Эти зависимости называются соответственно A(ω) – амплитудной частотной характеристикой (АЧХ), φ(ω) – фазовой частотной характеристикой (ФЧХ).

Для исследований и расчетов систем автоматического регулирования применяют преобразование Фурье, которое состоит в переходе от оригинала функции x(t) к ее изображению по Фурье F[x(t)] = X(jω) и определяется соотношением

$$F[x(t)] = X(j\omega) = \int_0^\infty x(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{5.14}$$

Последнее выражение называется прямым односторонним преобразованием Фурье, а комплексная функция X(jω) – изображением по Фурье или спектром функции x(t). Операция перехода от изображения функции по Фурье к оригиналу x(t) называется обратным преобразованием по Фурье и определяется соотношением

$$x(t) = F^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (5.15)$$

Сравнивая выражения одностороннего преобразования Лапласа, рассмотренного ранее, и (5.15), нетрудно убедиться в тесной связи односторонних преобразований Лапласа и Фурье. Они могут быть легко получены одно из другого. Для перехода от изображения функции по Лапласу к ее изображению по Фурье необходимо произвести замену символа p независимого комплексного переменного символом jω мнимого числа.

В теории автоматического регулирования широко применяется выражение, соответствующее отношению изображений по Фурье выходной ко входной величине $W(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$. Оно получило название частотной функции или амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) линейной системы или элемента.

Поскольку структура выражений для преобразований Лапласа и Фурье одинакова и различается только символами p и jω, все операции, проводимые над изображениями функции по Лапласу, можно осуществлять над изображениями по Фурье. Заменив p на jω в выражении передаточной функции W (p), получим выражение амплитудно-фазовой характеристики:

$$W(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + ... + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + ... + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}. \qquad (5.16)$$

Выделяя действительную Re(jω) и мнимую Im(jω) составляющие, можно представить АФХ в алгебраической форме:

$$W(j\omega) = \mathrm{Re}(j\omega) + \mathrm{Im}(j\omega). \qquad (5.17)$$

Зависимость действительной части АФХ от частоты называется действительной частотной характеристикой Re(jω), а зависимость мнимой части Im(jω) – мнимой частотной характеристикой. Обе характеристики можно выразить через коэффициенты полиномов числителя и знаменателя амплитудно-фазовой характеристики, выделив в каждом полиноме действительную и мнимую части.

При строгом подходе АФХ строится на комплексной плоскости при изменении частоты от –∞ до +∞. Однако АФХ симметрична относительно действительной оси при изменении частоты от –∞ до 0 и от 0 до +∞. Поэтому достаточно построить АФХ только для изменения частоты от 0 до +∞, а затем зеркально отобразить ее относительно действительной оси.

АФХ показана на рисунке 5.3, пунктирная кривая соответствует изменению частоты от –∞ до 0, сплошная кривая – изменению частоты от 0 до +∞.

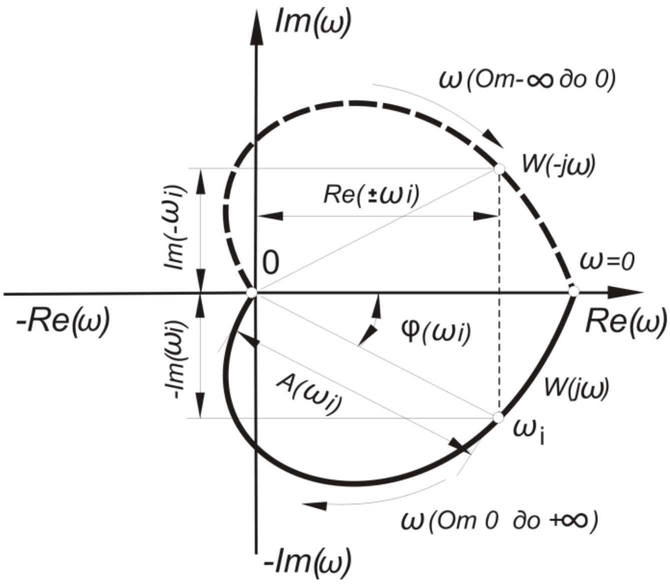


Рисунок 5.3 – Амплитудно-фазовая характеристика

АФХ системы можно также представить в виде радиуса-вектора на комплексной плоскости и записать в показательной форме:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \tag{5.18}$$

где A(ω) – модуль вектора (представляет собой амплитудно-частотную характеристику – АЧХ); φ(ω) – аргумент вектора W(jω) (представляет собой фазочастотную характеристику – ФЧХ).

Переход от алгебраической формы записи АФХ к показательной осуществляется по следующим соотношениям:

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = arctg\left(\mathrm{Im}(\omega) / \mathrm{Re}(\omega)\right).$$

При изменении частоты от 0 до +∞ конец вектора W(jω) описывает на комплексной плоскости кривую, которая называется годографом АФХ.

Таким образом, динамика элементов и систем характеризуется дифференциальными уравнениями, передаточными функциями, временными переходной и импульсной функциями, а также частотными характеристиками. Естественно, что все указанные выражения однозначно связаны между собой и могут быть теоретически получены из дифференциального уравнения. Некоторые из динамических характеристик (переходные функции, частотные характеристики) удобно получать экспериментально, что особенно важно при изучении сложных объектов, математическое описание которых отсутствует.

Широкое применение в практике теории автоматического регулирования нашли логарифмические амплитудно-частотная (ЛАЧХ) и фазо-частотная (ЛФЧХ) характеристики. Они строятся в логарифмических координатах с помощью асимптот. Это значительно упрощает задачи анализа и синтеза систем.

5.3 Контрольные вопросы

1. Что такое переходный процесс?
2. Что такое переходная функция?
3. Что такое дельта-функция?
4. Что такое импульсная переходная функция?
5. Что такое единичное гармоническое воздействие?
6. Что такое АЧХ?
7. Что такое ФЧХ?
8. Что такое АФХ?
9. Что такое годограф АФХ?