4 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

4.1 Математическое описание объектов управления

Для эффективного управления или исследования систем автоматического регулирования необходимо располагать адекватным математическим описанием процессов, протекающих как в самой системе, так и в ее элементах.

Под математическим описанием (математической моделью) подразумевают совокупность уравнений и ограничивающих условий, которые в количественной форме описывают зависимость выходных величин от входных в установившемся и переходном режимах.

Уравнение, которое описывает изменение во времени выходной величины системы или элемента в зависимости от изменения входной, называется уравнением динамики. Оно определяет динамический режим системы, который возникает всякий раз, когда на систему действуют возмущения. Переход системы из одного установившегося режима к другому при действии приложенного возмущения или изменения входного управляющего воздействия называется переходным режимом (процессом). В общем случае уравнения динамики являются дифференциальными или интегрально-дифференциальными и полностью описывают поведение системы (элемента) в переходном режиме. В качестве установившегося режима наиболее часто рассматривается состояние равновесия (покоя), которое как частный случай установившегося режима назовем установившимся состоянием. В качестве другого примера установившегося режима можно рассмотреть движение системы с постоянной скоростью.

Уравнения статики отражают функциональную связь между входными и выходными величинами системы в установившемся режиме. Уравнение установившегося состояния представляет собой дифференциальное уравнение нулевого порядка, т.е. алгебраическое уравнение, и оно может быть получено из уравнения динамики при неизменном входном воздействии приравниванием всех производных по времени к нулю.

Как уравнения статики, так и уравнения динамики могут быть линейными и нелинейными. Элемент называется линейным, если его уравнения статики и динамики являются линейными. Если же оба его уравнения (статики и динамики) или хотя бы одно из них является нелинейным, то элемент называется нелинейным.

Анализ и решение нелинейных дифференциальных уравнений связаны со значительными трудностями и возможны только в некоторых частных случаях, когда порядок уравнений невелик. Поэтому в инженерных расчетах часто прибегают к линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений, т. е. к замене нелинейных дифференциальных уравнений приближенными линейными, решение и анализ которых значительно проще. Наиболее распространенным методом линеаризации является метод малых отклонений, в основе которого лежит предположение о том, что в процессе регулирования входные и выходные величины изменяются так, что их отклонения от установившихся значений остаются достаточно малыми. В данной работе рассмотрен класс линейных или идеализированных линеаризованных систем.

Дифференциальные уравнения простых элементов можно составить, используя закономерности протекающих в них физических явлений. Такими закономерностями могут быть: закон сохранения вещества (объект регулирования уровня, давления), закон сохранения энергии (объект регулирования температуры), закон действующих масс (объект регулирования химической реакции), закон равновесия электродвижущих сил, законы Ома, Кирхгофа и т. д. Математическое выражение основного закона, определяющего процесс, протекающий в элементе, и является исходным дифференциальным уравнением динамики элемента.

При составлении дифференциальных уравнении сложного объекта или системы этот объект или систему целесообразно расчленить на ряд простейших элементов и для каждого из них составить уравнения статики и динамики. Расчленение на элементы должно производиться так, чтобы выходная величина предыдущего элемента являлась входной величиной последующего элемента. При этом можно найти дифференциальные уравнения объекта или системы путем исключения промежуточных величин. Поскольку в большинстве случаев уравнения элементов не линейны, то дифференциальное уравнение системы, как правило, будет нелинейным. Поэтому последним этапом при составлении уравнения динамики элемента или системы является его линеаризация.

Любой объект системы может быть описан с помощью систем дифференциальных уравнений, которые могут быть сведены к одному дифференциальному уравнению n-ого порядка, связывающему интересующие нас входы и выходы объекта. В общем виде уравнение может быть представлено так:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b_n x^{(n)} + b_{n-1} x^{(n-1)} + ... + b_1 x' + b_0 x\,. \quad (4.1)$$

Линейные дифференциальные уравнения, используемые для описания динамики элементов и систем автоматического регулирования, можно решить классическим методом или путем применения преобразования Лапласа. Согласно классическому методу, решение линейного неоднородного дифференциального уравнения, по которому определяют изменение величины $x_{вых}$ (t) во времени при заданном входном воздействии $x_{вх}$ (t) и известных начальных условиях, можно представить в виде суммы:

$$X_{вых}(t) = X_{общ}(t) + X_{част}(t)\,, \quad (4.2)$$

где $X_{общ}$(t) – общее решение однородного дифференциального уравнения; $X_{част}$(t) – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (с учетом правой части).

Поскольку общее решение не зависит характера изменения входного воздействия $X_{вх}$ (t) и определяется коэффициентами правой части уравнения (4.1) , то составляющая $X_{общ}$(t) решения определяет свободное движение системы и называется переходной (свободной) составляющей. Частное решение $X_{част}$(t) определяет вынужденное движение системы, обусловленное действием входного воздействия $x_{вх}$ (t). Оно зависит как от параметров системы a_i и b_i, так и от закона изменения $x_{вх}$ (t). Частное решение $X_{част}(t)$ называется вынужденной составляющей и характеризует установившийся процесс в системе.

Решение дифференциальных уравнений высоких порядков классическим методом представляет довольно сложную задачу, поэтому в теории автоматического регулирования применяется метод с использованием интегрального преобразования Лапласа.

В частности при решении задач создания систем управления сложными объектами, как правило, решаются две подзадачи:

1) Задача анализа.

2) Задача синтеза системы с заданным качеством.

В обоих случаях оценивается устойчивость системы, точность и быстродействие. Отличие второй подзадачи от первой заключается в том, что в систему вводятся элементы и связи, обеспечивающие достижение требуемого качества управления.

При проектировании систем управления и их анализе широкое применение нашло преобразование Лапласа (операторная форма записи дифференциального уравнения).

4.2 Преобразование Лапласа и передаточные функции

Преобразование Лапласа состоит в том, что вместо функции времени x(t) используют функцию комплексной переменной X (p), где p = (α+jβ). Функция X (p) называется изображением функции x (t), которая называется оригиналом функции X (p). Операция перехода от x(t) к X (p) называется прямым односторонним преобразованием Лапласа и обозначается символом L:

$$L[x(t)] = X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt. \qquad (4.3)$$

Операция перехода от изображения X (p) к оригиналу x(t) называется обратным преобразованием Лапласа и обозначается символом L^{-1}:

$$L^{-1}[X(p)] = x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)e^{pt}dp\,. \tag{4.4}$$

Для облегчения перехода от оригинала функции к ее изображению и обратно существуют таблицы преобразований по Лапласу для часто встречающихся функций. Часть из таких преобразований приведена в таблице 4.1. Преобразование Лапласа является линейным преобразованием, что подтверждается формулами 2 и 3 таблицы: изображение суммы функций равно сумме изображений этих функций и умножение оригинала функции на постоянный множитель соответствует умножению изображения функции на этот множитель. Во многих случаях переход к изображению упрощает вид функции. Так, изображение производной функции при нулевых начальных условиях равно изображению функции, умноженному на p^n, где n – порядок производной функции

$$y^{(n)}(t) \Rightarrow p^n Y(p)\,, \tag{4.5}$$

где $\Rightarrow$ – символ прямого преобразования Лапласа, аналогичный L.

Изображение интеграла функции равно изображению функции, деленному на p

$$\int y(t)dt \Rightarrow \frac{1}{p}Y(p)\,, \tag{4.6}$$

В таблице 4.1 приведены преобразования по Лапласу наиболее часто встречающихся в практике управления функций.

Таким образом, при использовании преобразований Лапласа имеется возможность перехода от производной и интеграла к простым алгебраическим выражениям (функциям комплексного переменного p).

Применяя прямое преобразование Лапласа к левой и правой частям дифференциального уравнения (4.1) при нулевых начальных условиях, получаем операторную форму записи уравнения элемента или системы, имеющего вид алгебраического уравнения:

$$[a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_1 p + a_0]Y(p) = [b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0]X(p)\,. \tag{4.7}$$

Отношение изображений по Лапласу выходной Y (p) ко входной X (p) величине при нулевых начальных условиях получило называние передаточной функцией (W(p)):

$$W(p) = Y(p)/X(p) \tag{4.8}$$

или в развернутой форме записи

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}. \tag{4.9}$$

Таблица 4.1 – Преобразования по Лапласу типовых операций и функций

№ п/п	Вид функции (оригинал)	Изображение функции по Лапласу
1.	x(t)	X(p)
2.	$\sum_{i=1}^{i=n} x_i(t)$	$\sum_{i=1}^{i=n} X_i(p)$
3.	A x(t)	A X(p)
4.	1(t)	1/p
5.	δ(t)=1’(t)	1
6.	di x(t)/dti, i=1…n	pi X(p)
7.	$\int x(t)dt$	X(p)/p
8.	x(t-τ)	e-pτ X(p)
9.	e±αt	1/(p±α)
10.	(1/λ) e-αtSinλt	1/[(p+α)2+λ2]
11.	(1/α)(1-e-αt)	1/(p+α)p

Передаточная функция, как и дифференциальное уравнение, однозначно определяет динамические свойства элемента или системы. Приравнивая к нулю полином знаменателя передаточной функции, получаем характеристическое уравнение исходного дифференциального уравнения:

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 = 0. \tag{4.10}$$

Корни характеристического уравнения, как известно, определяют решение однородного дифференциального уравнения и поэтому характеризуют свободное движение системы. Корни знаменателя передаточной функции (характеристического уравнения) обращают знаменатель в нуль, а передаточную функцию – в бесконечность и называются полюсами передаточной функции.

Используя понятие передаточной функции, можно из выражения (4.8) получить зависимость изображения по Лапласу выходной величины от изображения входной величины:

$$Y(p) = W(p)X(p). \tag{4.11}$$

Применяя к изображению выходной величины обратное преобразование Лапласа (4.3), можно найти решение исходного дифференциального уравнения, а, следовательно, определить переходный процесс:

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = L^{-1}[W(p)X(p)]. \tag{4.12}$$

Поскольку W (p) является дробно-рациональной функцией переменного p, то Y(p) также является дробно-рациональной функцией p.

В связи с тем, что таблицы оригиналов функций и их изображений содержат, как правило, только простые выражения, возникает задача разложения дробно-рациональной функции Y(p) на элементарные дроби и совершения над каждой из них обратного преобразования Лапласа. Переходный процесс равен сумме полученных при этом оригиналов указанных элементарных дробей.

Рассмотрим применение преобразований Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений на примере уравнения второго порядка

$$a_2 y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t). \tag{4.13}$$

Для решения уравнения необходимо знать начальные условия (значения y(1)(t) и y(t) в начальный момент времени t = 0) и изменение во времени x(t). Примем нулевые начальные условия: y(1)(0) = 0, y(0) = 0 и x(t) = 1 (t).

Преобразуем исходное дифференциальное уравнение по Лапласу. На основании свойства линейности это означает преобразование по Лапласу каждого члена левой и правой частей уравнения. Это можно выполнить по формуле номер 7 из таблицы 4.1:

$$[a_2 p^2 Y(p) + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p)] = [b_1 p X(p) + b_0 X(p)]. \quad (4.14)$$

Вынося за скобки Y(p) в левой и X(p) в правой частях уравнения, получаем

$$[a_2 p^2 + a_1 p + a_0] Y(p) = [b_1 p + b_0] X(p). \quad (4.15)$$

По формуле номер 4 из таблицы 4.1 находим X(p) = L [1 (t)] =1/p и подставляем это значение в полученное уравнение:

$$[a_2 p^2 + a_1 p + a_0] Y(p) = b_1 + b_0 / p. \quad (4.16)$$

Решим уравнение относительно изображения выходной величины:

$$Y(p) = (b_1 p + b_0) \big/ p(a_2 p^2 + a_1 p + a_0). \quad (4.17)$$

Для нахождения решения дифференциального уравнения y(t) произведем обратное преобразование Лапласа над Y (p), т.е. воспользуемся выражением (4.8).

Чтобы применить табличные функции (таблица 4.1), выражение Y(p) необходимо преобразовать и представить в виде суммы изображений, имеющихся в этой таблице. Для этого разложим на множители трехчлен, стоящий в знаменателе:

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = a_2 (p - p_1)(p - p_2), \quad (4.18)$$

где p1 и p2 — корни уравнения $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$, и тогда

$$Y(p) = (b_1 p + b_0) / a_2 p (p - p_1)(p - p_2). \quad (4.19)$$

Полученное выражение можно представить в виде суммы:

$$Y(p) = (C_0 / p) + [C_1 / (p - p_1)] + [C_2 / (p - p_2)], \quad (4.20)$$

где C_0, C_1, C_2 – неопределенные коэффициенты, которые определяются из решения тождественного уравнения, полученного путем сравнения числителя выражения (4.19) и выражения (4.18) деленного на a2.

По формулам 5 и 10 таблицы 1.1 находим оригиналы для каждого слагаемого и получаем решение дифференциального уравнения:

$$y(t) = C_0 + C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \qquad (4.21)$$

В данном случае коэффициенты C_0, C_1, C_2 выступают в качестве постоянных интегрирования и могут быть найдены по формулам, получаемым из начальных условий.

4.3 Модель электрической печи сопротивления (пример)

Объект управления представляет собой электрическую печь сопротивления. Выходная величина – температура печи. Пусть будет одинаковой во всех точках объема печи температура печи $\theta_П$. Входная величина (управляющее воздействие) – сила электрического тока i, протекающего по электронагревателю с сопротивлением R. Подводимая электрическая энергия к электронагревателю расходуется на изменение температуры печи с тепловыми потерями через кладку в окружающую среду.

Согласно закону сохранения энергии получим уравнение динамики печи:

$$i^2 R dt = C d\theta_П + KS(\theta_П - \theta_B)\mathrm{dt}, \qquad (4.22)$$

или

$$i^2 R = C(d\theta_П / dt) + KS(\theta_П - \theta_B),$$

где C — теплоемкость кладки и садки печи, Дж/К^0; $\theta_П$ и θ_B — соответственно температуры печи и окружающей среды (воздуха), К^0; S — площадь наружной поверхности кладки печи, м^2; К — коэффициент теплопередачи от атмосферы печи к окружающей среде, Вт/(м^2·К^0).

Полученное уравнение является нелинейным, так как входная величина – ток i имеет в уравнении вторую степень.

Пусть установившийся в печи режим характеризуется следующими значениями величин:

$$i = i_0;\ \theta_П = \theta_{П_0};\ \theta_{\mathrm{B}} = \mathrm{const}.$$

Уравнение печи в этом режиме имеет вид

$$i_0^2 R = KS(\theta_{\Pi_0} - \theta_B)\,. \tag{4.23}$$

Разложив левую часть уравнения печи для динамического режима в ряд Тейлора в окрестности точки $i = i_0$; $\theta_\Pi = \theta_{\Pi_0}$ и оставив в этом разложении члены с ΔI в первой степени, получим уравнение вида:

$$i_0^2 R + 2i_0 R\Delta i = C(d\theta_\Pi/\mathrm{dt}) + KS(\theta_\Pi - \theta_B)\,. \tag{4.24}$$

Вычитая из последнего выражения уравнение печи для установившегося режима, получаем линейное дифференциальное уравнение

$$2i_0 R\Delta i = C(d\theta_\Pi/\mathrm{dt}) + KS(\theta_\Pi - \theta_{\Pi_0})\,. \tag{4.25}$$

Введем в качестве новой выходной величины отклонение температуры печи от установившегося значения $\Delta\theta_\Pi = \theta_\Pi - \theta_{\Pi_0}$. Учитывая, что $\theta_{\Pi_0} = const$, получим линеаризованное уравнение объекта в отклонениях:

$$(C/KS)[\mathrm{d}(\Delta\theta_\Pi)/\mathrm{dt}] + \Delta\theta_\Pi = (2i_0\, R/KS)\Delta i\,. \tag{4.26}$$

Полученное уравнение можно записать в безразмерном виде. Для этого достаточно заменить абсолютные значения отклонений входной и выходной величин относи тельными:

$$X_{вых} = \Delta\theta_\Pi/\theta_{\Pi_0}\,;\; X_{вх} = \Delta i/i_0\,.$$

Разделив обе части дифференциального уравнения на θ_{Π_0}, получим дифференциальное уравнение в безразмерной нормализованной форме:

$$(\,C/KS\,)(\,dy/dt\,) + y = (\,2i_0^2\, R/KS\theta_{\Pi_0}\,)x\,. \tag{4.27}$$

Введем следующие обозначения:

$T = C/KS$, – постоянная времени печи, с; $k = 2i_0^2\, R/KS\theta_{\Pi_0}$ – коэффициент передачи (безразмерный).

С учетом введенных обозначений уравнение динамики объекта – электрической печи имеет вид:

$$T(\,dy/dt\,) + y = kx\,.$$

Произведя преобразование Лапласа этого уравнения можно получить передаточную функцию электрической печи сопротивления

$$W_{эп}(p) = \frac{k}{Tp+1}. \qquad (4.28)$$

4.4 Контрольные вопросы

1. Что такое математическая модель?
2. Что такое уравнение динамики?
3. Что такое уравнение статики?
4. Что такое преобразование Лапласа?
5. Что такое обратное преобразование Лапласа?
6. Что называется передаточной функцией?