16 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Пусть $\mathbf{A} = \{< x, \mu_{\mathbf{A}}(x) >\}$ – произвольное нечеткое множество (конечное или бесконечное) с элементами из универсума X и функцией принадлежности $\mu_{\mathbf{A}}(x)$.

Множество α-уровня. Обобщением носителя нечеткого множества является понятие *множества α-уровня,* под которым понимается обычное множество $\mathbf{A}_\alpha$, удовлетворяющее следующему условию: $\mathbf{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\mathbf{A}}(x) \geq \alpha\}$, где α – некоторое действительное число из интервала [0, 1], т. е. $\alpha \in [0,1]$.

В качестве примера рассмотрим определенное выше нечеткое множество $\mathbf{A}$, представляющее в некотором контексте *"небольшое натуральное число"* и равное: $\mathbf{A}=\{<1,1.0>, <2, 1.0>, <3, 0.9>, <4, 0.8>, <5, 0.6>, <6, 0.5>, <7,0.4>, <8,0.2>, <9, 0.1 >\}$. Тогда некоторые из его множеств α-уровня равны: $\mathbf{A}_{0,8}=\{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbf{A}_{0,5}=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathbf{A}_{0,1}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Графически множества α-уровня для конечного нечеткого множества удобно представить с помощью вложенных диаграмм Венна. В этом случае каждая из окружностей будет соответствовать отдельному множеству а-уровня, а элементы каждого из множеств а-уровня размещаются внутри соответствующей окружности (рисунок 1).

В случае бесконечных нечетких множеств для построения множеств α-уровня можно поступить следующим образом. На графике соответствующей функции принадлежности следует провести прямую линию $y=\alpha$. После чего выделить на оси X те точки или интервалы, для которых отдельные части графика расположены выше этой линии.

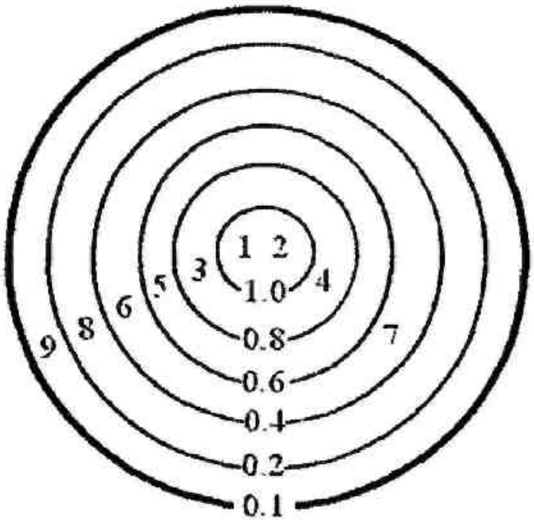

Рисунок 1 – Графическое изображение различных множеств α-уровня с помощью вложенных диаграмм Венна для конечного нечеткого множества "небольшое натуральное число"

Так, если в качестве примера рассмотреть бесконечное нечеткое множество $\mathbf{B}$, которое представляет *"действительное число, приближенно равное нулю",* с функцией принадлежности, график которой изображен на рисунке 2, *а*, то описанным выше способом можно получить, например, его множество 0.5-уровня (рисунок 2.7, б). Как можно заметить, в данном случае $\mathbf{B} = [-0{,}5;0{,}5]$.

Очевидно, для множеств α-уровня произвольного нечеткого множества $\mathbf{A}$ справедливо следующее свойство: если $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то $\mathbf{A}_{\alpha 1} \subseteq \mathbf{A}_{\alpha 2}$.

Высота нечеткого множества. Величина $h_{\mathbf{A}} = \sup\{\mu_{\mathbf{A}}(x)\}$, где супремум берется по всем значениям функции принадлежности для $x \in X$ называется *высотой* нечеткого множества $\mathbf{A}$. Согласно этому определению, нечеткое множество $\mathbf{A}$ пусто, если его высота в точности равна 0, т. е. $h_{\mathbf{A}} = 0$.

Например, высота конечного нечеткого множества $\mathbf{A}$ *"небольшое натуральное число"* равна 1 и соответствует двум элементам универсума: 1 и 2. Высота нечеткого множества $\mathbf{B}$, которое представляет *"действительное число, приближенно равное нулю",* также равна 1 и $\mu_{\mathbf{B}}(0) = 1$.

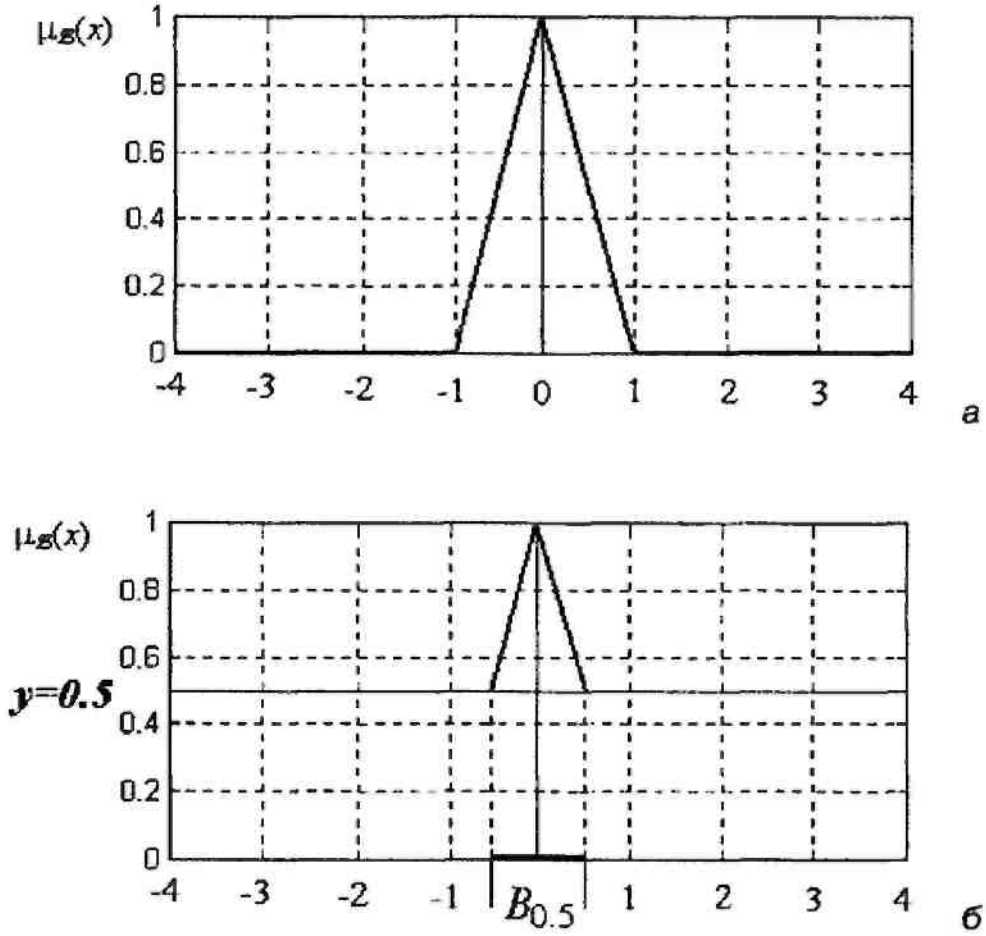

Рисунок 2 – Графическое изображение функции принадлежности

бесконечного нечеткого множества "действительное число, приближенно

равное нулю" (а) и его множества 0.5-уровня (б)

Рассмотрим в качестве еще одного примера бесконечное нечеткое множество $\mathbf{C}$, которое представляет *"большое действительное число",* с функцией принадлежности, заданной следующим математическим выражением:

$$\mu_{\mathbf{C}}(x) = 0 \text{ для } x \in [0,1) \text{ и } \mu_{\mathbf{C}}(x) = \frac{x-1}{x} \text{ для } x \in R_{+} \setminus [0,1).$$

Высота этого нечеткого множества также равна 1, однако среди элементов универсума $X = R_{+}$ отсутствуют числа, для которых $\mu_{\mathbf{C}}(x) = 1$ (рисунок 3). Действительно, какое бы число мы не рассмотрели, соответствующее значение функции принадлежности всегда будет строго меньше 1.

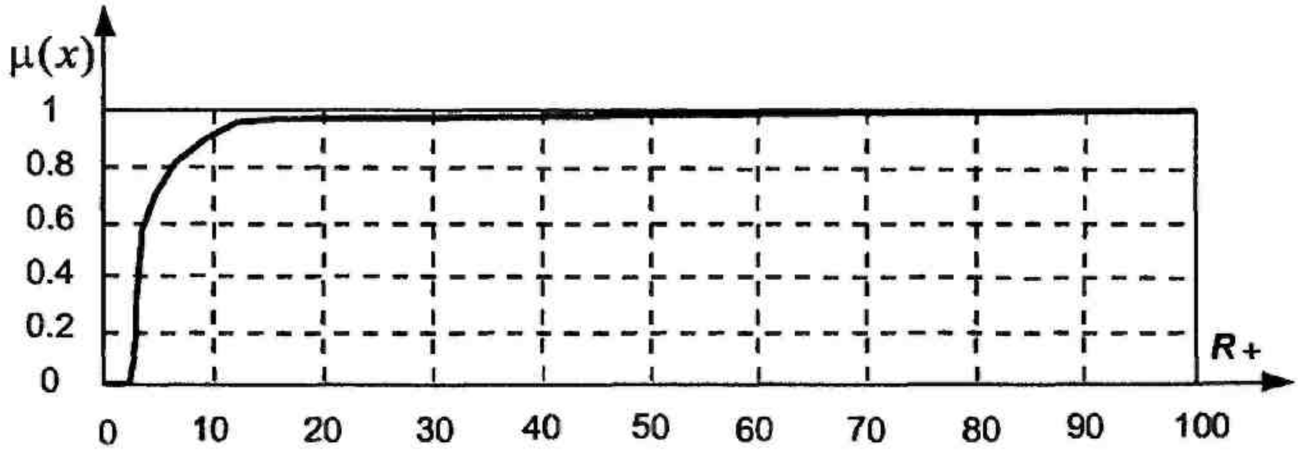

Рисунок 3 – График функции принадлежности бесконечного нечеткого множества **C**, которое представляет *"большое вещественное число"*

Особенность определения высоты заключается в том, что высота нечеткого множества всегда существует и равна некоторому действительному числу из интервала [0, 1], которому может соответствовать несколько элементов универсума. Действительно, для конечных нечетких множеств высота всегда равна максимальному значению их функций принадлежности. Для бесконечных нечетких множеств область значений соответствующих функции принадлежности всегда является компактным множеством, т. к. является подмножеством интервала [0, 1]. А поскольку для произвольного компактного множества всегда существует наименьшая верхняя грань, то она и принимается по определению за высоту нечеткого множества.

При определении высоты нечеткого множества использована специальная функция $y = \sup(f)$, которая получила свое название от латинского *supremum* – наивысшее и называется *верхней гранью* (или *наименьшей верхней гранью)*. Как будет видно из дальнейших рассуждений, эта функция отличается от похожей на нее функции $\max(f)$. Формально функция $y = \sup(f)$ определяется для обычных множеств следующим образом. Рассмотрим произвольное отображение $f : D \to R$, где D – область определения этого отображения ($D \subseteq X$). Отображение f называется *ограниченным сверху (снизу)* на множестве D, если существует конечное число $k \in R$, такое что выполняется условие:

$f(x) \le k$ (соответственно, $f(x) \ge k$) ($\forall x \in D$). При этом отображение *f(x)* называется *ограниченным* на множестве D, если оно одновременно ограничено на D сверху и снизу. Далее рассмотрим некоторое ограниченное сверху отображение *f(x),* для которого $D \subseteq R$, т. е. ограниченную сверху функцию *f(x).* В общем случае числовые значения $k \in R,$ для которых выполняется условие: $f(x) \le k$, $\forall x \in D$, образуют некоторое числовое подмножество $U \subseteq R,$ при этом очевидно, что $U \ne \varnothing$. Если среди всех $k \in U$ найдется некоторое наименьшее значение, обозначим его через k_S, то оно называется *наименьшей верхней гранью* функции *f(x)* на множестве $D \subseteq R$ и обозначается через $k_S = \sup(f)$ (читается "супремум *f* на множестве *D*").

Приведем простой пример. Рассмотрим конкретную числовую функцию – параболу, которую запишем в традиционной нотации: $y = x^2$, а в качестве области определения возьмем два интервала: замкнутый $D_1 = [-1;1]$ и открытый $D_1 = (-1;1)$. Очевидно, что $\sup\limits_{x \in D_1}(y) = 1$ и $\sup\limits_{x \in D_2}(y) = 1$, при этом $\max\limits_{x \in D_1}(y) = 1$ (достигается при $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ и эти $x_{1,2} \in D_1$), а $\max\limits_{x \in D_2}(y)$ не существует. Действительно, в открытом интервале (-1, 1) нет такого числа $x \in D_2$, для которого выполнялось бы равенство: $x^2 = 1$.

Нормальное нечеткое множество. Нечеткое множество **A** называется *нормальным,* если максимальное значение его функции принадлежности равно 1. Формально это означает, что для нормального нечеткого множества необходимо выполнение следующего условия:

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = 1,\ (\exists x \in X) \tag{1}$$

Например, нечеткое множество **A** *"небольшое натуральное число"* является нормальным, поскольку его высота равна 1 и соответствует двум его элементам: 1 и 2. Нечеткое множество **B** *"действительное число, приближенно равное нулю"* также является нормальным, поскольку его высота равна 1 и $\mu_{\mathbf{B}}(0) = 1$. Напротив, нечеткое множество **C** *"большое действительное число"* не является нормальным.

Субнормальное нечеткое множество. Если высота нечеткого множества равна единице ($h_{\mathbf{A}} = 1$), но условие (1) не выполняется, то такое нечеткое множество будем называть *субнормальным.*

Очевидно, нечеткое множество *C "большое действительное число"* является субнормальным.

Другими словами, для субнормального нечеткого множества необходимо лишь, чтобы его высота была равна 1, т. е. выполнялось бы условие: $h_{\mathbf{A}} = 1$. Это определение корректно, поскольку в этом случае всякое нормальное нечеткое множество является субнормальным с дополнительным условием (1).

Унимодальное нечеткое множество. Нечеткое множество $\mathbf{A}$ называется *унимодальным (строго унимодальным)*, если его функция принадлежности $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ является унимодальной (строго унимодальной).

В свою очередь произвольная функция принадлежности $\mu(x)$ называется *унимодальной на интервале* $[a,b] \subseteq R$, если она непрерывна на $[a,b]$, а также существует некоторый непустой $[c,d] \subset [a,b]$, такой что $a \le c \le d \le b$ и выполняются следующие условия:

- функция $\mu(x)$ строго монотонно возрастает на интервале $[a,c]$ при $a < c$;
- функция $\mu(x)$ строго монотонно убывает на интервале $[d,b]$ при $d < b$;
- функция $\mu(x)$ принимает свое максимальное значение на интервале $[c,d]$, т. е. любая точка $x \in [c,d]$ является точкой максимума функции принадлежности относительно интервала $[a,b]$:

$$x_m = \arg \max_{x \in [a,b]} \{\mu(x)\}. \tag{2}$$

В этом случае любая точка $x \in \mathbf{A}$ нечеткого множества $\mathbf{A}$ удовлетворяющая условию (2), называется *модальным значением* или *модой* нечеткого множества $\mathbf{A}$.

Если в этом определении интервал $[c,d]$ вырождается в точку, т. е. $c = d$, то соответствующая функция принадлежности называется *строго унимодальной на интервале* $[a,b]$.

Функция принадлежности $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ называется *унимодальной (строго унимодальной),* если она унимодальна (строго унимодальна) на носителе соответствующего нечеткого множества $\mathbf{A}$.

Например, рассмотренное выше $\mathbf{A}$ *"небольшое натуральное число"* является унимодальным, но не является строго унимодальным. Нечеткое множество $\mathbf{B}$, которое представляет *"действительное число, приближенно равное нулю",* с функцией принадлежности, график которой изображен на рисунке 2, *а* является строго унимодальным.

Что касается дискретного нечеткого множества **C**, то относительно его унимодальности ничего сказать нельзя. Рассматриваемые далее функции принадлежности трапециевидной формы являются унимодальными, а треугольной формы – строго унимодальными.

Ядро нечеткого множества. *Ядром* нечеткого множество $\mathbf{A}$ называется такое обычное множество $\mathbf{A}_1$, элементы которого удовлетворяют условию: $\mathbf{A}_1 = \{x \in X \mid \mu_{\mathbf{A}}(x) = 1\}$

Например, ядро нечеткого множества $\mathbf{A}$ *"небольшое натуральное число"* равно двухэлементному множеству $\mathbf{A}_1 = \{1,2\}$. Ядро нечеткого множества $\mathbf{B}$ *"действительное число, приближенно равное нулю"* равно одноэлементному множеству (singleton) $\mathbf{B} = \{0\}$. Нечеткое множество $\mathbf{C}$ *"большое действительное число"* имеет пустое ядро.

Не трудно заметить, что если произвольное нечеткое множество не является нормальным, то ядро такого нечеткого множества будет пустым. Таким образом, имеет место следующая фундаментальная теорема. Для того чтобы некоторое нечеткое множество было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело непустое ядро.

Поскольку, как было показано выше, высота нечеткого множества всегда существует, то произвольное непустое нечеткое множество $\mathbf{A}$ всегда можно преобразовать по меньшей мере к субнормальному нечеткому множеству $\mathbf{A}'$ по следующей формуле:

$$\mu_{\mathbf{A}'}(x) = \frac{\mu_{\mathbf{A}}(x)}{h_{\mathbf{A}}}. \tag{3}$$

Более того, если в исходном нечетком множестве $\mathbf{A}$ найдется хотя бы один элемент $x \in \mathbf{A}$, для которого значение функции принадлежности равно высоте этого нечеткого множества, т. е. $\mu_{\mathbf{A}}(x) = h_{\mathbf{A}}$ полученное после преобразования (3) нечеткое множество $\mathbf{A}'$ будет нормальным.

В частности, если исходное нечеткое множество $\mathbf{A}$ является нормальным или субнормальным, то преобразование (3) приводит к тривиальному результату. Рассмотрим случай, когда исходное нечеткое множество $\mathbf{A}$ не является пустым и субнормальным. Это означает, что его высота равна некоторому значению из открытого интервала (0, 1), т. е. $h_{\mathbf{A}} \in (0,1)$. При этом, если $h_{\mathbf{A}} = \mu_{\mathbf{A}}(x)$ для некоторого элемента $x \in X$, то для этого элемента $x \in X$ значение функции принадлежности $\mu_{\mathbf{A}}(x)$, рассчитанное по формуле (3), будет равно 1. Это означает, что нечеткое множество $\mathbf{A}'$ будет нормальным.

Если же $h_{\mathbf{A}} > \mu_{\mathbf{A}}(x)$ для всех элементов $x \in X$, то значение функции принадлежности $\mu_{\mathbf{A}'}(x)$, рассчитанное по формуле (3), всегда будет меньше 1. Однако, по свойству наименьшей верхней грани числового множества, высота результирующего нечеткого множества будет равна единице: $h_{\mathbf{A}'} = \sup\{\mu_{\mathbf{A}}(x)\} = 1$. А это означает, что нечеткое множество $\mathbf{A}'$ будет субнормальным.

Границы нечеткого множества. *Границами* нечеткого множества называются такие элементы универсума, для которых значения функции принадлежности отличны от 0 и 1. Другими словами, границы нечеткого множества $\mathbf{A} = \{x, \mu_{\mathbf{A}}(x)\}$ включают те и только те элементы универсума $x \in X$, для которых выполняется условие: $0 < \mu_{\mathbf{A}}(x) < 1$.

Точки перехода нечеткого множества. Элементы нечеткого множества

$y \in \mathbf{A}$, для которых выполняется условие: $\mu_{\mathbf{A}}(x) = 0{,}5$, называются *точками перехода* этого нечеткого множества $\mathbf{A}$.

В общем случае введенные в рассмотрение понятия можно проиллюстрировать графически следующим образом (рисунок 4).

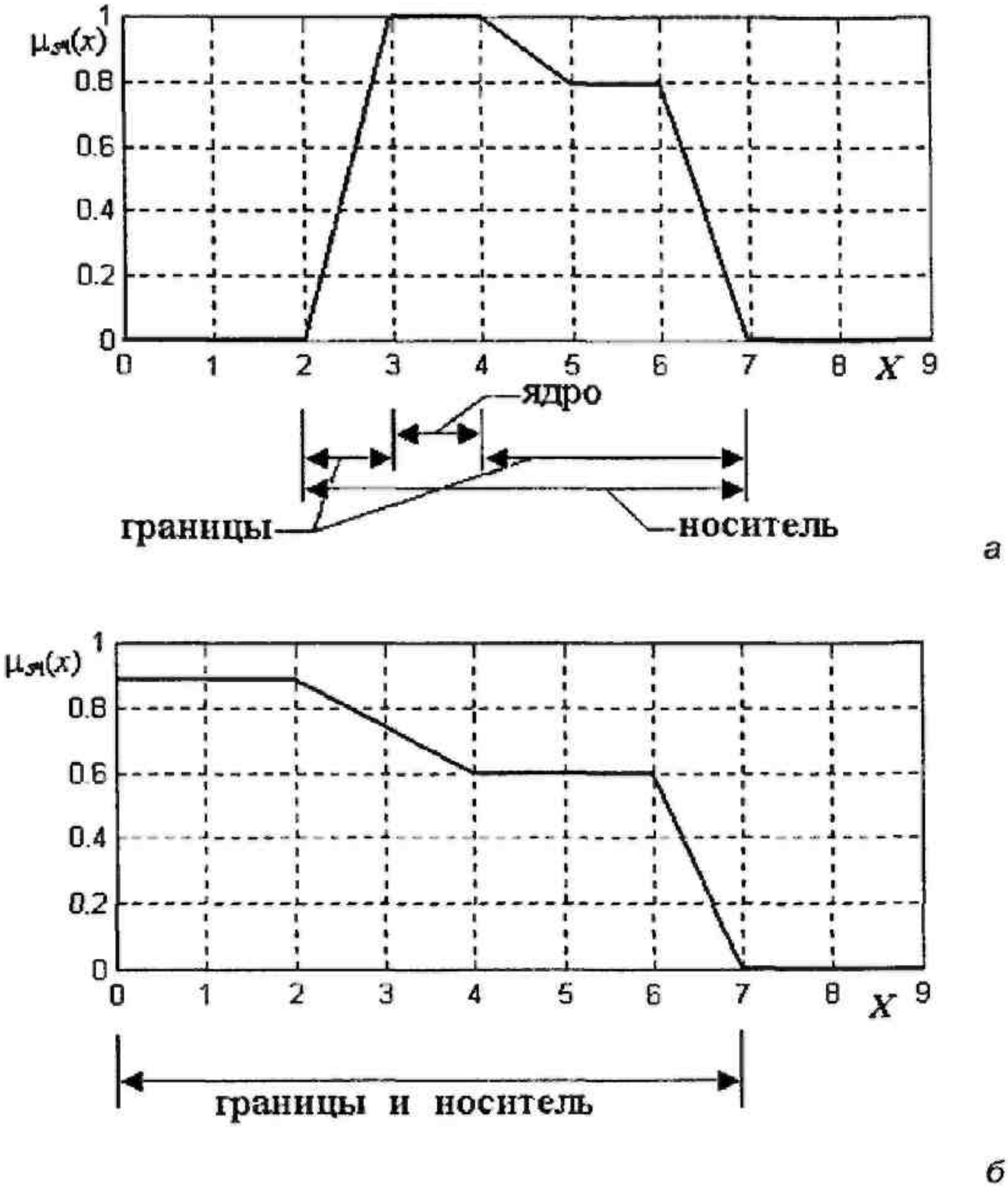

Рисунок 4 – Ядро, носитель и границы нечетких множеств,

одно из которых является нормальным (а),

а другое – не является нормальным (б)

В дополнение к этому рассмотренное ранее конечное нечеткое множество $\mathbf{A}$ выходных дней имеет непустой носитель $\mathbf{A}=\{$*пятница, суббота, воскресенье*$\}$, является нормальным, поскольку $\mu_{\mathbf{A}}(\textit{суббота})=1$.

Рассмотренное в этом же примере бесконечное нечеткое множество выходных дней имеет непустой носитель $\mathbf{A}_S$, которому будет соответствовать открытый интервал действительных чисел, для которых график функции принадлежности лежит выше оси абсцисс. Оно также является нормальным, поскольку $\mu_{\mathbf{A}}(x)=1$.

Ближайшее четкое множество. Часто оказывается полезным понятие четкого множества $\mathbf{A}_{\text{ч}}$, *ближайшего* к нечеткому множеству $\mathbf{A}$. Характеристическая функция такого множества может быть определена следующим выражением:

$$\chi_{\mathbf{A}_{\text{ч}}}(x)=\left\{\begin{matrix} 0, & \textit{если}\ \mu_{\mathbf{A}}(x)<0{,}5 \\ 1, & \textit{если}\ \mu_{\mathbf{A}}(x)>0{,}5 \\ 0\ \textit{или}\ 1, & \textit{если}\ \mu_{\mathbf{A}}(x)=0{,}5 \end{matrix}\right\}. \qquad (4)$$

Для характеристики нечетких множеств используют также понятие выпуклости, которое ассоциируется с соответствующим графическим изображением функции принадлежности.

Выпуклое нечеткое множество. Нечеткое множество $\mathbf{A}=\{x,\mu_{\mathbf{A}}(x)\}$ с универсумом $\boldsymbol{X}$ называют *выпуклым,* если его функция принадлежности $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\mu_{\mathbf{A}}(x)\geq\min\{\mu_{\mathbf{A}}(a),\mu_{\mathbf{A}}(b)\} \qquad (5)$$

для любых значений x, a, $b\in X$, при которых $a<x<b$ и $a\neq b$.

На рисунке 5 изображены графики двух функций принадлежности, первая из которых является выпуклой, а вторая – не является выпуклой. В связи с рассмотрением этого примера следует заметить, что первая функция принадлежности является строго унимодальной с модой $x_m=5$, а вторая – не является унимодальной и имеет две моды: $x_m=2$ и $x_m=4$.

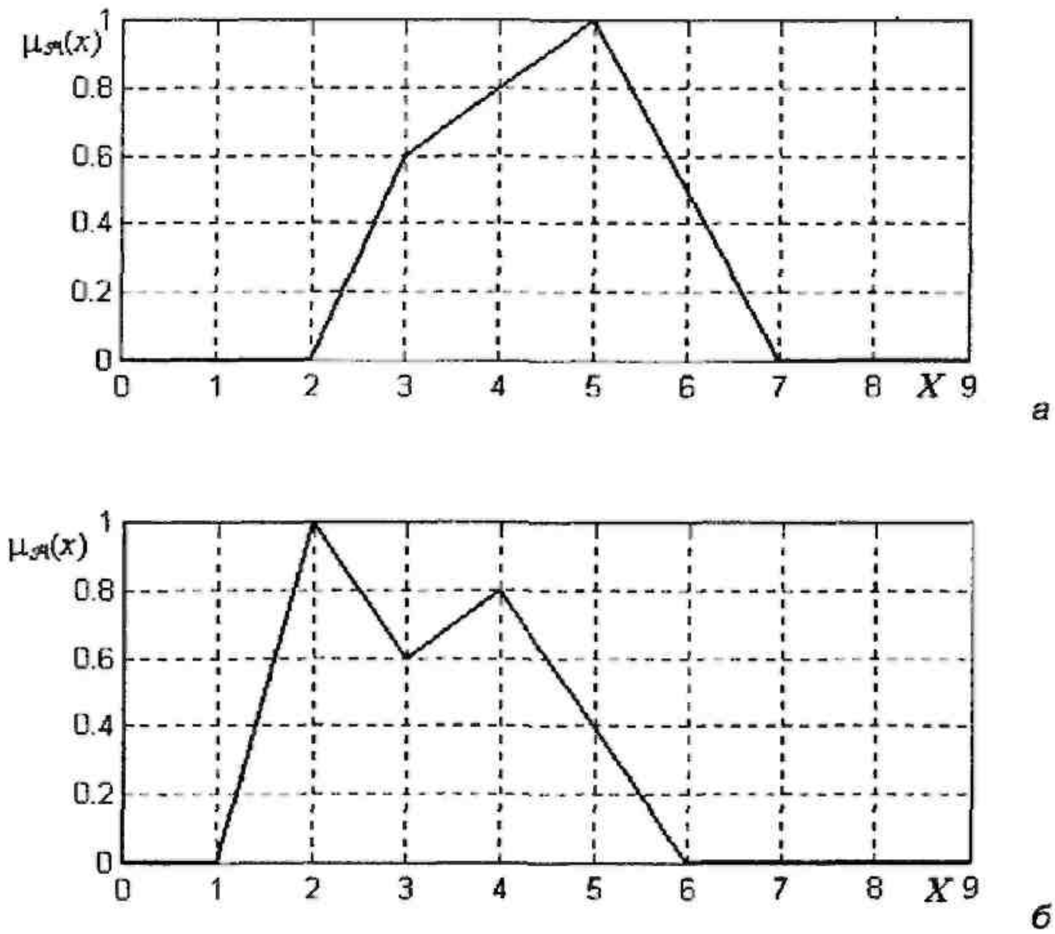

Рисунок 5 – Графики функций принадлежности выпуклого (а) и невыпуклого (б) нечеткого множества

16.1 Контрольные вопросы

1. Что такое множество α-уровня?
2. Что такое высота нечеткого множества?
3. Что такое нормальное нечеткое множество?
4. Что такое унимодальное нечеткое множество?
5. Что такое ядро нечеткого множества?
6. Что такое границы нечеткого множества?