15 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ-1

15.1 Определение нечеткого множества

Нечеткое множество (fuzzy set) представляет собой совокупность элементов произвольной природы, относительно которых нельзя с полной определенностью утверждать – принадлежит ли тот или иной элемент рассматриваемой совокупности данному множеству или нет. Другими словами, нечеткое множество отличается от обычного множества тем, что для всех или части его элементов не существует однозначного ответа на вопрос: "Принадлежит или не принадлежит тот или иной элемент рассматриваемому нечеткому множеству?" Можно этот вопрос задать и по-другому: "Обладают или нет его элементы некоторым характеристическим свойством, которое может быть использовано для задания этого" нечеткого множества?"

Для построения нечетких моделей систем само понятие нечеткого множества следует определить более строго, чтобы исключить неоднозначность толкования тех или иных его свойств. Оказалось, что существуют несколько вариантов формального определения нечеткого множества, которые по сути отличаются между собой способом задания характеристической функции данных множеств. Среди этих вариантов наиболее естественным и интуитивно понятным является задание области значений подобной функции как интервал действительных чисел, заключенных между 0 и 1 (включая и сами эти значения).

Математическое определение нечеткого множества. Формально нечеткое множество $\mathbf{A}$ определяется как множество упорядоченных пар или кортежей вида: $< x, \mu_{\mathbf{A}}(x) >$, где x является элементом некоторого универсального множества или универсума $\mathbf{X}$, а $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ – *функция принадлежности,* которая ставит в соответствие каждому из элементов $x \in \mathbf{X}$ некоторое действительное число из интервала [0, 1], т. е. данная функция определяется в форме отображения:

$$\mu_{\mathbf{A}} : \mathbf{X} \to [0,1]. \quad (15.1)$$

При этом значение $\mu_{\mathbf{A}}(x)=1$ для некоторого $x \in \mathbf{X}$ означает, что элемент x *определенно принадлежит* нечеткому множеству $\mathbf{A}$, а значение $\mu_{\mathbf{A}}(x)=0$ означает, что элемент x *определенно не принадлежит* нечеткому множеству $\mathbf{A}$.

Формально конечное нечеткое множество будем записывать в виде: $\mathbf{A} = \{< x_1, \mu_{\mathbf{A}}(x_1) >, < x_2, \mu_{\mathbf{A}}(x_2) >, ..., < x_n, \mu_{\mathbf{A}}(x_n) >\}$, а в общем случае – в виде: $\mathbf{A} = \{< x, \mu_{\mathbf{A}}(x) >\}$.

Из всех нечетких множеств выделим два частных случая, которые по сути совпадают со своими классическими аналогами и используются в дальнейшем при определении других нечетких понятий.

Пустое нечеткое множество. В теории нечетких множеств сохраняют свой смысл некоторые специальные классические множества. Так, например, *пустое нечеткое* множество или множество, которое не содержит ни одного элемента, по-прежнему обозначается через ø и формально определяется как такое нечеткое множество, функция принадлежности которого тождественно равна нулю для всех без исключения элементов: $\mu_{ø}=0$. В этой связи уместно упомянуть о том, что характеристическая функция обычного пустого множества также тождественно равна нулю для каких бы то ни было элементов: $\chi_{ø}=0$.

Универсум. Что касается другого специального множества, то гак называемый *универсум,* обозначаемый через $\mathbf{X}$, уже был использован выше в качестве обычного множества, содержащего в рамках некоторого контекста все возможные элементы. Формально удобно считать, что функция принадлежности универсума как нечеткого множества тождественно равна единице для всех без исключения элементов: $\mu_{\mathbf{A}}=1$. При этом характеристическая функция обычного универсального множества также тождественно равна единице для каких бы то ни было элементов: $\chi_{\mathbf{A}}=1$.

Для того чтобы определить конечные и бесконечные нечеткие множества, необходимо ввести в рассмотрение одно из основных понятий, которое используется для характеристики произвольного нечеткого множества, а именно – понятие носителя нечеткого множества.

Носитель нечеткого множества. Носителем нечеткого множества $\mathbf{A}$ называется обычное множество A_S которое содержит те и только те элементы универсума, для которых значения функции принадлежности соответствующего нечеткого множества отличны от нуля. Математически носитель нечеткого множества определяется следующим условием:

$$A_S = \{x \in \mathbf{X} \mid \mu_{\mathbf{A}}(x) > 0\} \quad \forall x \in \mathbf{X}. \tag{15.2}$$

Очевидно, пустое нечеткое множество имеет пустой носитель, поскольку $\mu_{\varnothing}=0$ для любого его элемента. Носитель универсума, рассматриваемого как нечеткое множество, совпадает с самим универсумом. Для удобства и сокращения записи произвольного нечеткого множества часто указывают лишь значения его функции принадлежности для элементов носителя, неявно предполагая, что все остальные значения функции принадлежности равны нулю.

В зависимости от количества элементов в нечетком множестве по аналогии с обычными множествами можно определить конечные и бесконечные нечеткие множества.

Конечные нечеткие множества. Нечеткое множество называется *конечным,* если его носитель является конечным множеством. При этом вполне уместно говорить, что такое нечеткое множество имеет конечную *мощность,* которая численно равна количеству элементов его носителя как обычного множества. В этом случае для обозначения мощности произвольного нечеткого множества $\mathbf{A}$ можно также использовать символ $card(\mathbf{A})$. Удобно считать мощность пустого множества равной 0.

Бесконечные нечеткие множества. Аналогичным образом можно определить и *бесконечные* нечеткие множества как такие нечеткие множества, носитель которых не является конечным множеством. При этом *счетным* нечетким множеством будем называть нечеткое множество со счетным носителем, т. е.

носитель которого имеет счетную мощность $\aleph_0$ *в обычном смысле. Несчетным* нечетким множеством будем называть нечеткое множество с несчетным носителем, т. е. носитель которого имеет несчетную мощность или мощность *континуума* c (или $\aleph$) в обычном смысле.

Очевидно, данное выше определение носителя нечеткого множеств корректно, поскольку как для конечных, так и для бесконечных нечетких множеств выражение (15.2) имеет смысл.

Чтобы привести некоторые примеры нечетких множеств и приступить к определению их основных свойств, следует рассмотреть основные способы, которыми формально могут быть заданы произвольные нечеткие множества.

Нечеткие множества могут быть заданы двумя основными способами:

1. В форме *списка с явным перечислением* всех элементов и соответствующих им значений функции принадлежности, образующих рассматриваемое нечеткое множество. При этом зачастую элементы с нулевыми значениями функции принадлежности просто не указываются в данном списке. Этот способ подходит для задания нечетких множеств с конечным дискретным носителем и небольшим числом элементов. В этом случае нечеткое множество удобно записывать в виде: $\mathbf{A} = \{< x_1, \mu_{\mathbf{A}}(x_1) >, < x_2, \mu_{\mathbf{A}}(x_2) >, \ldots, < x_n, \mu_{\mathbf{A}}(x_n) >\}$, где n – рассматриваемое число элементов нечеткого множества $\mathbf{A}$ (его носителя).

Например, возьмем в качестве универсума $\mathbf{X} = \{1,2,3,\ldots\}$ – множество натуральных чисел. Тогда нечеткое множество $\mathbf{A}$, представляющее в некотором контексте *"небольшое натуральное число"*, можно задать следующим образом: $\mathbf{A}$={<1,1.0>, <2, 1.0>, <3, 0.9>, <4, 0.8>, <5, 0.6>, <6, 0.5>, <7,0.4>, <8,0.2>, <9, 0.1 >}. При этом элементы, для которых $\mu_{\mathbf{A}}(x) = 0$, отсутствуют в этом списке.

2. *Аналитически* в форме математического выражения для соответствующей функции принадлежности. Этот способ может быть использован для задания произвольных нечетких множеств как с конечным, так и с бесконечным носителем. В этом случае нечеткое множество удобно записывать в виде:

$\mathbf{A} = \{< x, \mu_{\mathbf{A}}(x) >\}$ или $\mathbf{A} = \{x, \mu_{\mathbf{A}}(x)\}$, где $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ – некоторая функция, заданная аналитически в форме математического выражения $f(x)$ или графически в форме некоторой кривой. Наиболее часто используемые виды функций принадлежности будут рассмотрены далее.

Для формальной строгости при задании нечетких множеств необходимо явно указывать соответствующий универсум $\mathbf{X}$ элементов, из которых формируется то или иное конкретное нечеткое множество. В общем случае никаких предположений относительно элементов этого множества не делается. Однако с практической точки зрения целесообразно ограничить универсум элементами рассматриваемой предметной области или решаемой задачи. Поскольку при построении нечетких моделей систем используются количественные переменные, то наиболее часто в качестве универсума $\mathbf{X}$ используется некоторое подмножество действительных чисел $\mathbf{R}$ например, множество неотрицательных действительных чисел $\mathbf{R}+$ или натуральных чисел $\mathbf{N}$.

Рассмотрим некоторые конкретные примеры нечетких множеств.

Пример 1. Предположим, необходимо построить некоторое нечеткое множество, которое содержательно описывало бы выходные (нерабочие) дни обычной семидневной недели. В терминологии классических множеств ситуация тривиальная, а именно, дни недели с понедельника по пятницу являются рабочими, а суббота и воскресенье – выходными. Заметим, что речь идет о традиционной календарной неделе, а рабочие дни считаются без учета сменности и других особенностей трудозатрат. Таким образом, обычное не нечеткое множество выходных дней $\mathbf{A}$ состоит из двух элементов: $\mathbf{A} = \{$*суббота, воскресенье*$\}$. Эта точка зрения является общепринятой для бухгалтерии при расчете заработной платы сотрудникам.

Что же касается определения соответствующего нечеткого множества $\mathbf{A}$, попытаемся субъективно оценить степень нашего эмоционального отношения к различным дням недели, рассматривая их с точки зрения выходных и психологии возможного отдыха. Для большинства из нас ситуация уже не будет казаться столь простой, как в предыдущем случае.

Что касается дней с понедельника по четверг, то отношение к ним как к рабочим дням вряд ли изменится. А вот пятница, особенно ее вечер для многих ассоциируется с полноценным отдыхом и высокой степенью положительных эмоций. Суббота является безусловно выходным днем, в течение которого могут быть забыты все служебные заботы, особенно в субботу вечером, а для многих – и ночью. А вот что касается воскресенья, то ближе к вечеру ситуация меняется – нередко на ум приходит мысль: *"Завтра нужно рано вставать и приступать к работе",* и настроение уже нельзя считать столь безоблачным.

Таким образом, рассматриваемое нечеткое множество $\mathbf{A}$, описывающее выходные дни недели, может быть задано, например, в виде: $\mathbf{A}$={<*понедельник,* 0>, <*вторник,* 0>, <*среда,* 0>, <*четверг,* 0>, <*пятница,* 0.5>, <*суббота,* 1.0>, <*воскресенье,* 0.8>}. Здесь в качестве универсума выступают все дни недели: $\mathbf{X}$={*понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье*}, а функция принадлежности задается перечислением своих значений. При этом чем ближе ее значение к 1, тем больше соответствует тот или иной день недели нашему отношению к нему как к выходному дню.

Попробуем представить это нечеткое множество графически. Очевидно, обычный способ изображения множеств с помощью диаграмм Венна здесь не подходит, поскольку границы данного нечеткого множества не являются четко очерченными. Однако, помня, что каждое нечеткое множество вполне определяется своей функцией принадлежности, изобразим графически функцию принадлежности этого нечеткого множества. Для этого на горизонтальной оси отметим отдельные значения элементов универсума (в нашем случае – элементы множества $\mathbf{X}$), а на вертикальной оси – значения соответствующей функции принадлежности $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ (рисунок 15.1).

Даже этот простой пример показывает, что однозначно определить то или иное нечеткое множество не представляется возможным, а иногда – и принципиально невозможным. Если кто-то решит, что его субъективная оценка выходных дней отличается от рассмотренной выше, то он/она будут по-своему правы. Соответственно, в качестве нечеткого множества $\mathbf{A}$ могли бы выступать множества: **A**={<понедельник, 0>, <вторник, 0>, <среда, 0>, <четверг, 0.1>, <пятница, 0.6>, <суббота, 1.0>, <воскресенье, 0.7>} или **A**={<понедельник, 0>, <вторник, 0.1>, <среда, 0>. <четверг, 0.1>, <пятница, 0.5>, <суббота, 0.9>, <воскресенье, 0.8>}. Важно представлять себе, что с формальной точки зрения все они должны удовлетворять лишь исходному определению нечеткого множества в форме (15.1).

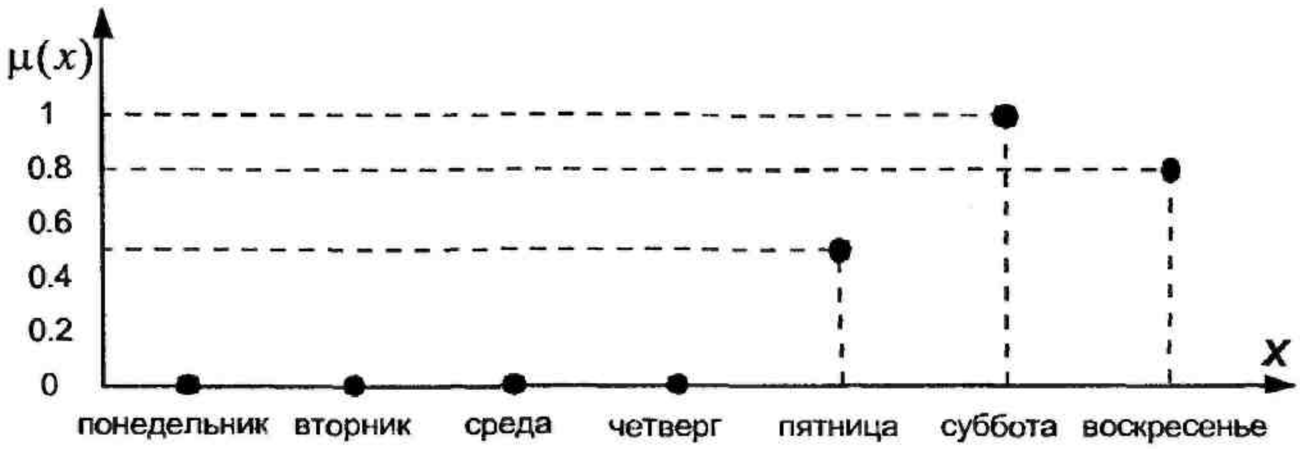


Рисунок 15.1 – Графическое представление конечного нечеткого множества **A**, описывающего выходные дни недели, в форме значений функции принадлежности этого нечеткого множества

Продолжим рассмотрение предыдущего примера с целью его расширения на случай бесконечного нечеткого множества. Поскольку наше отношение к выходным дням недели может изменяться в течение времени суток, а горизонтальная ось на рисунке 15.1 легко преобразуется к непрерывной оси времени, то и соответствующее нечеткое множество **A** допускает естественное обобщение. А именно. каждый из дней недели будем представлять как отдельные сутки с переходом в 0 часов к следующему дню недели. Тогда функция принадлежности нечеткого множества **A** может быть задана аналитически в форме некоторой кривой, которая в максимальной степени соответствует нашему эмоциональному отношению к выходным дням в течение всех суток.

В простейшем случае мы могли бы аппроксимировать представленную ранее функцию принадлежности (рисунок 15.1) некоторой кривой. Один из возможных вариантов такой функции принадлежности изображен на рисунке

15.2, на котором горизонтальная ось соответствует посуточному представлению семидневной недели.

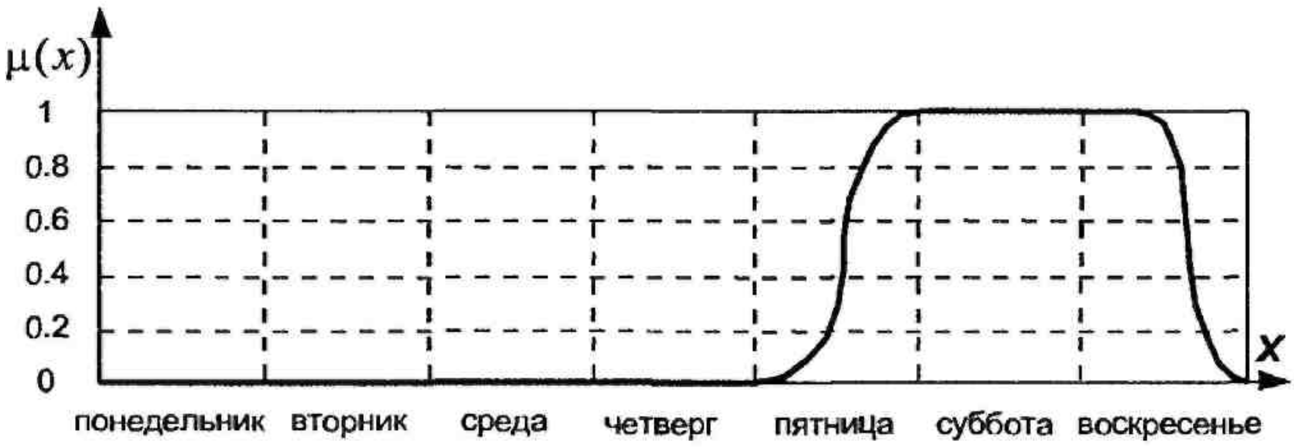


Рисунок 15.2 – Графическое представление бесконечного нечеткого множества $\mathbf{A}$, описывающего выходные дни недели, в форме кривой его функции принадлежности

Для сравнения рассмотрим представление обычного (не нечеткого) множества выходных дней недели $\mathbf{A}=\{$*суббота, воскресенье*$\}$ в форме бесконечного множества. В этом случае характеристическая функция $\chi_{\mathbf{A}}(x)$ данного множества может быть записана в виде кусочно-непрерывной функции, принимающей только два значения – 0 и 1 на множестве значений универсума $\mathbf{X}$ (рисунок 15.3).

Из рассмотрения данного примера видно, что характеристическую функцию $\chi_{\mathbf{A}}$ обычного множества $\mathbf{A}$ в том или ином контексте удобно считать специальным случаем функции принадлежности $\mu_{\mathbf{A}}$ соответствующего нечеткого множества $\mathbf{A}$. Этот факт позволяет рассматривать произвольное нечеткое множество $\mathbf{A}$ как обобщение обычного множества $\mathbf{A}$, а множество $\mathbf{A}$ – как сужение или частный случай соответствующего нечеткого множества $\mathbf{A}$.

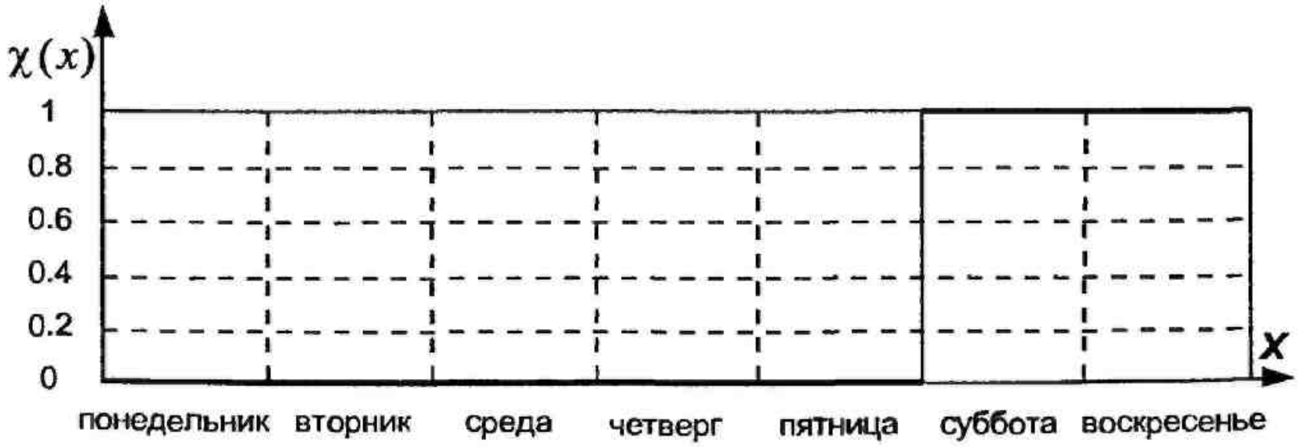


Рисунок 15.3 – Графическое представление обычного множества выходных дней **A** в форме значений соответствующей характеристической функции

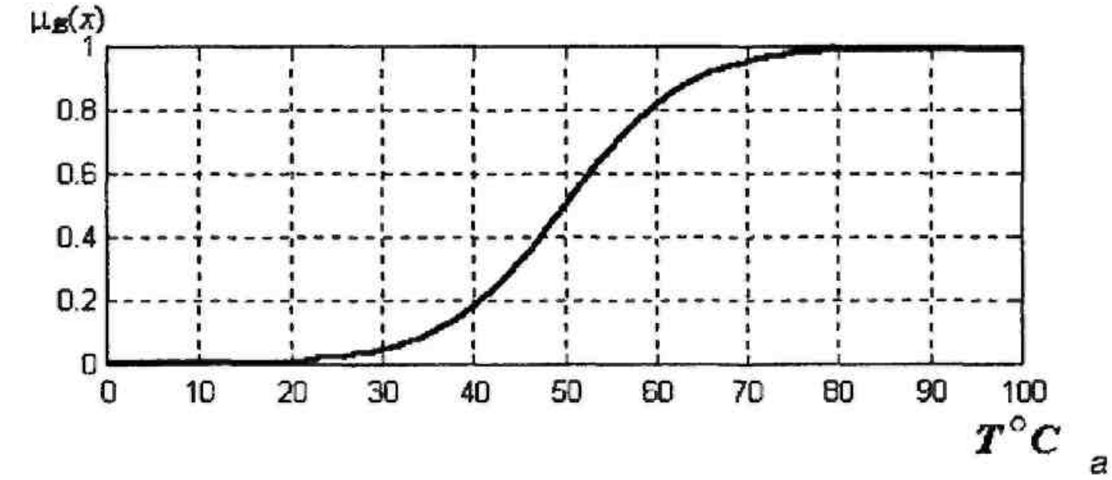
Пример 2. В качестве второго примера рассмотрим типичную бытовую ситуацию, с которой сталкиваются многие из нас при попытке дать характеристику температуры того или иного напитка. Подобная характеристика обычно основывается исключительно на субъективных ощущениях, например, горячий кофе или чай, холодный квас или кола. Хотя в этом случае неявно используется некоторая шкала температуры, при этом, как правило, не применяется никаких измерительных инструментов.

Применительно к данной ситуации рассмотрим нечеткое множество **B**, которое будет характеризовать *"горячий кофе"*. В этом случае в качестве универсума естественно взять шкалу температуры, измеренной в градусах Цельсия и заключенной в открытом интервале (0 °C, 100 °C), т. е. $\mathbf{X}=\{x|0\text{ °C} < x < 100\text{ °C}\}$. Выбор этого интервала вполне оправдан с физической точки зрения, поскольку именно в этом диапазоне температур кофе потенциально может существовать как напиток. Очевидно, что отдельная чашка кофе, скажем x_1, с температурой 10 °C не может быть признана горячей, поэтому для нее значение функции принадлежности рассматриваемому множеству **B** будет равно пулю, т. е. $\mu_{\mathbf{B}}(x_1)=0$. С другой стороны, другая чашка кофе x_2 с температурой 90 °C вполне может быть признана горячей, поэтому для нее значение функции принадлежности рассматриваемому множеству **B** будет равно 1, т. е. $\mu_{\mathbf{B}}(x_2)=0$.

Что касается значений температур, заключенных между этими крайними значениями, то ситуация представляется уже не столь однозначной. Более того, она по своей сути является исключительно субъективной и неопределенной, поскольку чашка кофе с температурой 55 °С для одного индивидуума может оказаться горячей, а для другого – не слишком горячей. Именно в этом и проявляется *нечеткость* задания соответствующего множества. Тем не менее, мы можем быть вполне уверены в общем виде функции принадлежности, а именно – в том, что соответствующая функция принадлежности является *монотонно возрастающей* (или более строго – монотонно неубывающей).

Таким образом, в качестве множества $\mathbf{B} = \{x, \mu_{\mathbf{B}}(x)\}$, описывающего горячий кофе, можно рассматривать, например, такое нечеткое множество, для которого функция принадлежности имеет следующий вид (см. рисунок 15.4, а и/или 15.4, б).

Рассмотренный пример допускает обобщение на другие ситуации, связанные с представлением аналогичной нечеткой информации. В частности, целый ряд свойств технических устройств, бытовых приборов и социальных явлений могут инициировать похожие нечеткие множества. Например, такие фразы, как *"скоростной автомобиль", "высокооплачиваемая работа", "благоустроенная квартира", "щедрые чаевые"*, *"престижный район", "вкусный ужин"* порождают нечеткие множества, аналогичные рассмотренному в примере 2. При этом общий вид функций принадлежности таких множеств будет подобен изображенным на рисунке 15.4, а, б.



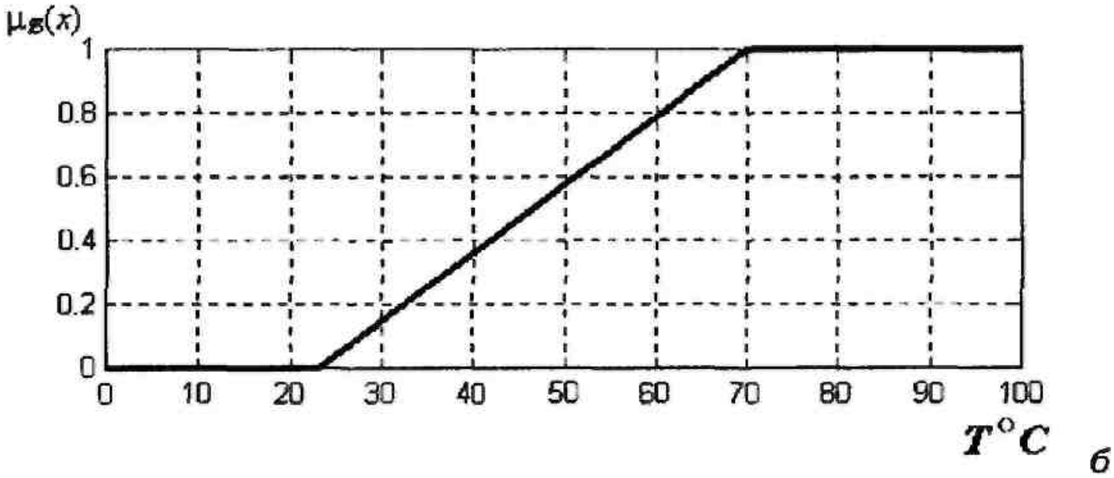


Рисунок 15.4 – Графики вариантов функций принадлежности для нечеткого множества **B**, описывающего "горячий кофе"

Пример 3. Следующий пример связан с распознаванием букв некоторого алфавита и десятичных цифр, что является весьма актуальной задачей при сканировании текстовых документов. Предположим, имеется некоторое графическое изображение, на котором представлены некоторые буква и цифра (рисунок 15.5).

Первое изображение порождает на множестве всех прописных букв (например, русского) алфавита **X**={А, Б, В, ..., Я} некоторое конечное нечеткое множество **C**={<А, μ_C(А)>, <Б, μ_C(Б)>,..., <Я, μ_C(Я)>}. Это нечеткое множество содержательно описывает соответствие изображения, представленного на рисунке 15.5, а, той или иной букве русского алфавита. Таким множеством может быть, например следующее нечеткое множество: **C**={<А, 0>, <Б, 0>,...,<И, 1.0>, <Й, 0.9>, <К, 0.4>, <Л, 0>, <М, 1.0>, <Н, 1.0>, <О, 0>, ..., <Х, 0.3>, ..., <Я, 0>}. Пропущенные элементы соответствуют нулевым значениям функции принадлежности для остальных букв алфавита.

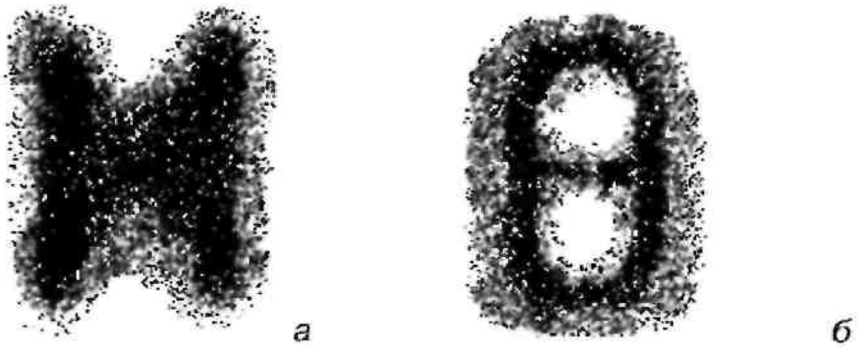


Рисунок 15.5 – Графическое изображение некоторой буквы (а) и некоторой десятичной цифры (б)

Второе изображение порождает на множестве всех десятичных цифр $\mathbf{X}$ ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} конечное нечеткое множество $\mathbf{D}$={<0, $\mu_{\mathbf{D}}(0)$, <1, $\mu_{\mathbf{D}}(1)$>, ..., <9, $\mu_{\mathbf{D}}(9)$>). Это нечеткое множество содержательно описывает соответствие изображения, представленного на рисунке 15.5, б, той или иной десятичной цифре. В частном случае таким нечетким множеством может быть, например, следующее: $\mathbf{D}$={<0, 0.8>, <1, 0>, <2, 0>, <3, 0.9>, <4, 0>, <5, 0.2>, <6, 1.0>, <7, 0>, <8, 1.0>, <9, 0.9>}. Здесь указаны все значения функции принадлежности для элементов универсума.

Рассмотренные выше примеры иллюстрируют характерные аспекты неопределенности, которые встречаются в практике нечеткого моделирования. Во-первых, каждое из нечетких множеств допускает в общем случае неоднозначное представление, что отражает субъективную точку зрения на моделирование соответствующих практических ситуаций. Другими словами, если кто-то не согласен с конкретным вариантом задания нечетких множеств $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, и $\mathbf{C}$, то он/она могут предложить свои варианты значений функций принадлежности. И формально все будут по-своему правы, поскольку адекватность этих представлений обуславливается их последующим практическим использованием для решения той или иной задачи. Во-вторых, эти примеры хорошо иллюстрируют концептуальное различие между теорией нечетких множеств и теорией вероятностей, поскольку рассмотренные варианты неопределенности имеют не стохастический характер. И, наконец, в-третьих, выбор аналитической функции или вида кривой для той или иной функции принадлежности с целью задания соответствующего нечеткого множества зачастую определяется соображениями удобства и простоты.

15.2 Контрольные вопросы

1. Что такое нечеткое множество?
2. Что такое функция принадлежности?
3. Что такое универсум?
4. Что такое носитель нечеткого множества?
5. Какие есть основные способы задания нечетких множеств?