11 УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

11.1 Управляемость и наблюдаемость объектов управления

Управляемость и наблюдаемость являются столь же важными свойствами объектов, как и их устойчивость. Оценка управляемости объекта должна предшествовать постановке любой задачи динамической оптимизации, ибо для не полностью управляемого объекта такая задача может оказаться неразрешимой. Оценка наблюдаемости объекта должна предшествовать постановке задачи его идентификации, ибо не полностью наблюдаемый объект не может быть идентифицирован. Для оценки управляемости и наблюдаемости обычно используются уравнение состояния и уравнение выхода объекта в их векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{AX} + \mathbf{BU}; \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{CX}, \end{aligned} \tag{11.1}$$

где X – n-мерный вектор-столбец переменных состояния; Y – q-мерный вектор-столбец выходных переменных; U – m-мерный вектор-столбец управлений ($m,\ q \le n$); $\mathbf{A}_{n\times n}$, $\mathbf{B}_{n\times m}$, $\mathbf{C}_{q\times n}$ – постоянные матрицы указанных размерностей.

11.1.1 Управляемость объекта

Этот термин физически означает возможность перевода объекта из *любого* начального состояния (режима работы) $X(t_0)=X_0$ в *любое* конечное состояние $X(t_к)=X_к$ за конечное время $t \in [t_0, t_k]$ путем приложения допустимого управления U(t). Объект, обладающий указанным свойством, называется *полно-*

стью управляемым. Иными словами, если объект полностью управляем, то всегда найдется такое допустимое управление, которое за конечное время обеспечит перевод данного объекта из любого начального состояния в любое заданное конечное состояние.

Оценка управляемости осуществляется на основе критерия Р. Калмана, согласно которому для полной управляемости объекта (11.1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$rang\left\| \mathbf{B} \ \vdots \mathbf{AB} \ \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \vdots \ldots \vdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \ \right\|_{n\times n\cdot m} = n \tag{11.2}$$

Формирование блочной матрицы в выражении (11.2) целесообразно выполнять по итерационному алгоритму:

$$\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{AB}, \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{B}, \ldots, \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}$$

Всего указанная матрица содержит n блоков по m столбцов каждый. Из любых n столбцов можно составить определитель размерности $n\times n$. Общее количество таких определителей определяется по формуле числа сочетаний

$$C_{nm}^{n} = \frac{(nm)!}{n!(nm-n)!}$$

Если хотя бы один из определителей не равен нулю, то условие (11.2) выполняется и, следовательно, объект полностью управляем.

В частном случае, когда m=1, проверка выполнения условия (11.2) сводится к вычислению единственного определителя

$$\left| \mathbf{b} \vdots \mathbf{Ab} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{b} \vdots \ldots \vdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \right|_{n\times n},$$

(здесь b – есть матрица-столбец), который должен быть отличен от нуля.

При заранее известном ранге матрицы B, равном r, критерий (11.2) упрощается и принимает вид

$$rang\left\| \mathbf{B} \vdots \mathbf{AB} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \ldots \vdots \mathbf{A}^{n-r}\mathbf{B} \ \right\|_{n\times m(n-r+1)} = n \tag{11.2'}$$

В этом случае размерность матричных блоков сохраняется, но их количество сокращается на величину r-1, что значительно упрощает применение критерия.

Если матрица А объекта (11.1) имеет каноническую диагональную форму:

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{Vmatrix},\quad \lambda_1\neq\lambda_2\neq\dots\neq\lambda_n,$$

то целесообразно использовать еще более простой критерий Е. Гильберта, согласно которому для полной управляемости такого объекта необходимо и достаточно, чтобы матрица В не содержала нулевых строк. Например:

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{Vmatrix};\qquad \mathbf{b}=\begin{Vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{Vmatrix}\qquad\Rightarrow$$

$$\left|\mathbf{b}\vdots\mathbf{Ab}\vdots\mathbf{A}^2\mathbf{b}\right|=\begin{vmatrix}b_1 & \lambda_1 b_1 & \lambda_1^2 b_1\\ b_2 & \lambda_2 b_2 & \lambda_2^2 b_2\\ b_3 & \lambda_3 b_3 & \lambda_3^2 b_3\end{vmatrix}=b_1b_2b_3\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{vmatrix}=b_1b_2b_3\left|\mathbf{V}\right|\neq 0$$

при $\forall b_1, b_2, b_3 \neq 0$, т.к. определитель Вандермонда $\left|\mathbf{V}\right|\neq 0$.

Если матрица А объекта (11.1) имеет каноническую жорданову форму:

$$\mathbf{A}=\mathbf{J}=\begin{Vmatrix}\lambda & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda\end{Vmatrix},$$

то для полной управляемости такого объекта необходимо и достаточно, чтобы последняя строка матрицы В была ненулевой. Например:

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{Vmatrix};\ \ \mathbf{b}=\begin{Vmatrix}b_1\\ b_2\end{Vmatrix}\ \ \Rightarrow$$

$$\left|\mathbf{b}\vdots\,\mathbf{Ab}\right|=\begin{vmatrix}b_1 & (\lambda b_1+b_2)\\ b_2 & \lambda b_2\end{vmatrix}=\lambda b_1b_2-\lambda b_1b_2-b_2^2=-b_2^2\neq 0 \text{ при } \forall b_1 \text{ и } \forall b_2\neq 0.$$

Наконец, если модель объекта (11.1) представлена в нормальной форме, то такой объект полностью управляем при любых численных значениях его параметров. Например:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{Vmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{Vmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\left| \mathbf{b} \vdots \mathbf{Ab} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{b} \right| = \begin{vmatrix} 0 & \vdots & 0 & \vdots & b_3 \\ 0 & \vdots & b_3 & \vdots & -a_2 b_3 \\ b_3 & \vdots & -a_2 b_3 & \vdots & -a_1 b_3 + a_2^2 b_3 \end{vmatrix} = -b_3^3 \neq 0 \ \text{ при } \ \forall a_0,\ a_1,\ a_2 \ \text{ и } \ \forall\, b_3 \neq 0.$$

11.1.2 Управляемость по выходу

Этот термин физически означает возможность перевода выхода объекта из любого состояния $Y(t_0) = Y_0$ в любое другое состояние $Y(t_к) = Y_к$ за конечное время $t_к$ путем приложения допустимого управления.

Критерий полной управляемости по выходу в самом общем случае имеет вид

$$rang \left\| \mathbf{CB} \vdots \mathbf{CAB} \vdots \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \vdots \ldots \vdots \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \right\| = q, \tag{11.3}$$

где q – число выходных переменных объекта (или число строк матрицы C). Для выполнения условия (11.3) необходимо (но недостаточно), чтобы матрица $\mathbf{C}_{q \times n}$ была полного ранга, т.е. $rang$ C = q.

11.1.3 Наблюдаемость объекта

Этот термин физически означает возможность определения начального состояния объекта X_0 по результатам наблюдений за его выходом $Y(t)$ на конечном интервале $t \in [t_0, t_k]$ (рисунок 11.1). Объект, обладающий таким свойством, называется *полностью наблюдаемым*.

На рисунке показаны графики двух наблюдаемых переменных состояния $x_1(t)$, $x_3(t)$, которые являются компонентами вектора выхода Y(t) трехмерного объекта (y_1=x_1, y_2=x_3). Если такой объект полностью наблюдаемый, то это означает, что, используя известные начальные значения y_{10}=x_{10}, y_{20}=x_{30} и последующие значения x_{1i}, x_{3i} при $t_i \le t_к$, можно вычислить начальное значение x_{20}. Многократно сдвигая интервал наблюдения на величину $\Delta t = t_0^{'} - t_0$, можно вычислить значение $x_{20}^{'}$ и другие последующие значения переменной $x_2(t)$.

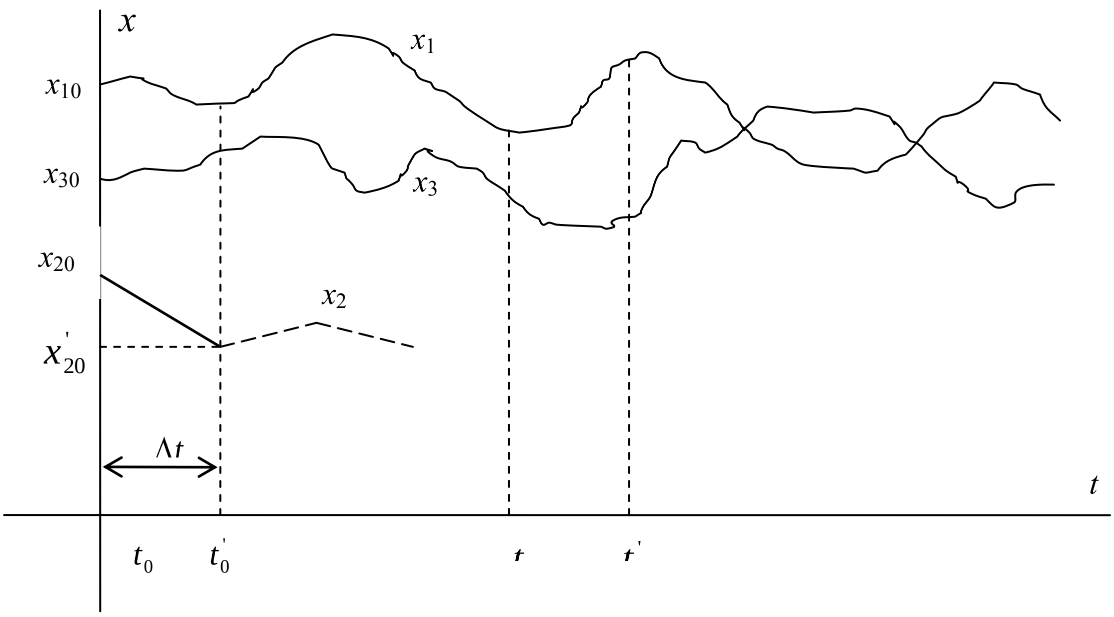

Рисунок 11.1 – Пример наблюдаемости объекта

Согласно критерию Р. Калмана для полной наблюдаемости объекта необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$rang\left\| \mathbf{C^T} \vdots \mathbf{A^T C^T} \vdots (\mathbf{A^T})^2 \mathbf{C^T} \vdots \ldots \vdots \mathbf{A^{T^{n-1}}} \mathbf{C^T} \right\|_{n \times qn} = n, \tag{11.4}$$

где т – символ операции транспонирования матриц. Поскольку при транспонировании ранг матриц не изменяется, то при известном ранге матрицы С, равном r, подобно (11.2’) вместо (11.4) можно пользоваться выражением

$$rang\left\| \mathbf{C^T} \vdots \mathbf{A^T C^T} \vdots (\mathbf{A^T})^2 \mathbf{C^T} \vdots \ldots \vdots (\mathbf{A^T})^{\mathbf{n}-r} \mathbf{C^T} \right\|_{n \times q(n-r+1)} = n. \qquad (11.4’)$$

Если матрица A имеет каноническую диагональную форму, то согласно критерию Е. Гильберта для полной наблюдаемости объекта необходимо и достаточно, чтобы матрица C не содержала нулевых столбцов. Например:

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{Vmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{Vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{Vmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A};\ \ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}=\begin{Vmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{Vmatrix},$$

тогда согласно (11.4) находим

$$\left|\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\vdots\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\vdots(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^2\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\right|=\begin{vmatrix}c_1 & \lambda_1 c_1 & \lambda_1^2 c_1\\ c_2 & \lambda_2 c_2 & \lambda_2^2 c_2\\ c_3 & \lambda_3 c_3 & \lambda_3^2 c_3\end{vmatrix}=c_1c_2c_3\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{vmatrix}=c_1c_2c_3\left|\mathbf{V}\right|\neq 0$$

при $\forall c_1,\ c_2,\ c_3 \neq 0.$

Если же матрица A имеет каноническую жорданову форму, то для полной наблюдаемости объекта необходимо и достаточно, чтобы первый столбец матрицы C был ненулевым. Например:

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{Vmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{Vmatrix}c_1 & c_2\end{Vmatrix}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{Vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{Vmatrix};\quad \mathbf{C}^{\mathrm{T}}=\begin{Vmatrix}c_1\\ c_2\end{Vmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\left|\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\vdots\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\right|=\begin{vmatrix}c_1 & \lambda c_1\\ c_2 & (c_1+\lambda c_2)\end{vmatrix}=c_1^2\neq 0\quad \text{при}\ \ \forall c_1\neq 0.$$

Имеется существенная разница между наблюдаемостью по Калману и обычной практической наблюдаемостью (измеряемостью) объекта. С практической точки зрения наблюдаемыми являются лишь те переменные состояния, которые можно непосредственно измерить с помощью существующих измерительных устройств. Наблюдаемыми же по Калману являются не только непосредственно измеряемые переменные, но и те переменные, которые могут быть вычислены как некоторые функции непосредственно измеряемых переменных.

Отсюда очевидно, что полная наблюдаемость по Калману является лишь необходимым, но недостаточным, условием практической наблюдаемости.

С другой стороны, полная практическая наблюдаемость, означающая возможность непосредственного измерения всех переменных состояния объекта, является достаточным, но отнюдь необязательным, условием полной наблюдаемости по Калману. Действительно, если все переменные состояния доступны непосредственному измерению, то матрица наблюдаемости имеет диагональный вид: $C = C^T = \mathrm{diag}(c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn})$, где c_{ii} – коэффициенты передачи измерительных устройств. При этом rang $C^T = n$, поэтому условие (11.4) всегда выполняется независимо от вида матрицы A.

11.1.4 Оценка управляемости и наблюдаемости объектов по их структурным схемам

Всякий сложный объект состоит из отдельных, связанных между собой блоков. Для каждого блока на основании его передаточной функции можно получить уравнения состояния и по ним, применяя указанные выше критерии, оценить управляемость и наблюдаемость этого блока. Для оценки управляемости и наблюдаемости всего объекта можно использовать приводимые ниже теоремы.

Теорема 1. Для полной управляемости и полной наблюдаемости объекта, состоящего из параллельно соединенных блоков (рисунок 11.2), *необходимо и достаточно* полной управляемости и наблюдаемости каждого отдельного блока.

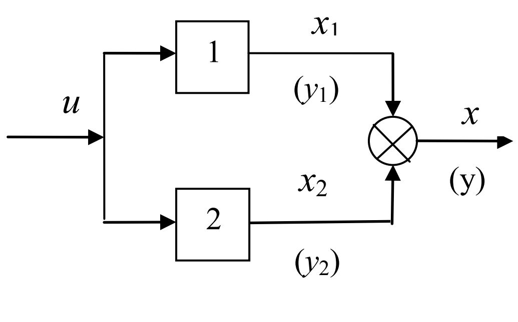

Рисунок 11.2

Теорема 2. Для полной управляемости и наблюдаемости объекта, состоящего из последовательно соединенных блоков (рисунок 11.3), *необходимо* (но недостаточно) полной управляемости и наблюдаемости каждого блока.

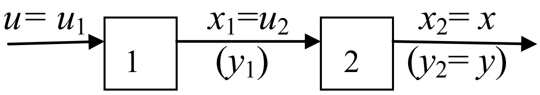

Рисунок 11.3

Теорема 3. Для полной управляемости и наблюдаемости объекта с обратной связью (рисунок 11.4) *необходимо и достаточно* полной управляемости и наблюдаемости *последовательного соединения* блоков прямого канала и цепи ОС.

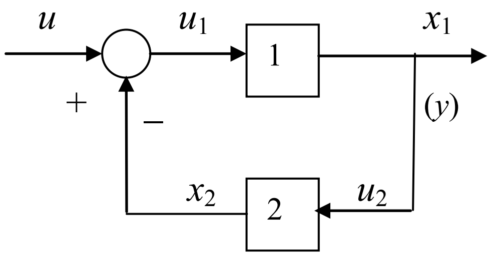

Рисунок 11.4

Можно дать и другую формулировку теоремы 3: для полной управляемости и наблюдаемости замкнутой САУ *необходимо и достаточно* полной управляемости и наблюдаемости соответствующей разомкнутой САУ.

Практическая целесообразность использования приведенных теорем достаточно очевидна. Пусть, например, объект состоит из двух структурных блоков, причем порядок каждого блока $n = 5$. Тогда общее число уравнений состояния такого объекта равно 10 и, следовательно, матрица А уравнения (11.1) имеет 100 элементов. В то же время матрицы А для каждого отдельного блока имеет только по 25 элементов, т. е. в 4 раза меньше. Отсюда ясно, что двукратное использование критерия (11.2) при $n = 5$ потребует значительно меньших ресурсов ЭВМ, чем его однократное использование при $n = 10$.

Если передаточная функция объекта имеет хотя бы один нуль, равный ее полюсу, то объект не может быть одновременно полностью управляемым и полностью наблюдаемым. Поэтому внешним признаком такой неполной управляемости или наблюдаемости является наличие одинаковых операторных полиномов в числителе и знаменателе передаточной функции объекта.

Примечание. Рангом системы строк (столбцов) матрицы А называется максимальное число линейно независимых строк (столбцов). Несколько строк (столбцов) называются линейно-независимыми, если ни одна из них не выражается линейно через другие. Ранг системы строк всегда равен рангу системы столбцов и это число называется рангом матрицы. Ранг матрицы – наивысший из порядков миноров этой матрицы, отличных от нуля.

11.2 Управляемость и наблюдаемость типовых динамических звеньев

Утверждение 1. Идеальное интегрирующее звено, апериодические звенья первого и второго порядков, а так же колебательное звено полностью управляемы и наблюдаемы при любых численных значениях их параметров.

В справедливости данного утверждения легко убедиться путем непосредственного применения критериев (11.2), (11.4) к уравнениям состояния перечисленных звеньев.

Утверждение 2. Безынерционное усилительное звено полностью управляемо и наблюдаемо при любых значениях его коэффициента усиления.

Для данного звена нельзя записать уравнение состояния, поэтому доказательством утверждения может служить простое рассуждение. Последовательное соединение этого звена и, например, апериодического звена первого порядка эквивалентно тоже апериодическому звену первого порядка, но с другим коэффициентом усиления. Поскольку согласно утверждению 1 новое апериодическое звено полностью управляемо и наблюдаемо, то из выполнимости необходимых условий теоремы 2 следует, что безынерционное усилительное звено формально тоже является полностью управляемым и наблюдаемым.

Утверждение 3. Реальное дифференцирующее звено со статизмом полностью управляемо и наблюдаемо при любых значениях его параметров.

Доказательство аналогично вышеприведенному. Эквивалентом указанного звена является параллельное соединение безынерцинного усилительного звена и апериодического звена первого порядка, поэтому из утверждений 1, 2 и теоремы 1 следует справедливость данного утверждения.

Утверждение 4. Реальное дифференцирующее звено без статизма полностью управляемо и наблюдаемо при любых значениях его параметров.

Параллельное соединение указанного звена и апериодического звена первого порядка с одинаковыми постоянными времени в знаменателях их передаточных функций эквивалентно реальному дифференцирующему звену со статизмом, поэтому из утверждения 3 и теоремы 1 следует справедливость данного утверждения.

Утверждение 5. Идеальное дифференцирующее звено полностью управляемо и наблюдаемо.

Последовательное соединение указанного звена и апериодического звена первого порядка эквивалентно реальному дифференцирующему звену без статизма, которое согласно утверждению 4 полностью управляемо и наблюдаемо. Поэтому из утверждения 1 и теоремы 2 очевидна справедливость данного утверждения.

11.3 Контрольные вопросы

1. Что такое управляемость объекта?
2. По какому критерию оценивается управляемость объекта?
3. Что такое управляемость по выходу?
4. Что такое наблюдаемость объекта?
5. Что является внешним признаком неполной управляемости или наблюдаемости объекта?