3 ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В настоящее время не существует единой точки зрения по вопросу о том, что понимать под имитационным моделированием. Определений термина «имитационное моделирование» к настоящему времени существует большое количество.

Имитационное моделирование – метод, позволяющий строить модели, описывающие процессы так, как они проходили бы в действительности. Такую модель можно «проиграть» во времени как для одного испытания, так и заданного их множества. При этом результаты будут определяться случайным характером процессов. По этим данным можно получить достаточно устойчивую статистику.

Другое определение: имитационное моделирование – это метод исследования, при котором изучаемая система заменяется моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, и с ней проводятся эксперименты с целью получения информации об этой системе.

Существует класс объектов, для которых по различным причинам не разработаны аналитические модели, либо не разработаны методы решения полученной модели. В этом случае математическая модель заменяется имитатором или имитационной моделью.

Имитационная модель – логико−математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта.

Имитационную модель можно рассматривать как множество правил (дифференциальных уравнений, карт состояний, автоматов, сетей и т. п.), которые определяют, в какое состояние система перейдет в будущем из заданного текущего состояния.

Имитация – это процесс «выполнения» модели, проводящий ее через (дискретные или непрерывные) изменения состояния во времени. Имитация, как метод решения нетривиальных задач, получила начальное развитие в связи с созданием ЭВМ в 1950-х – 1960-х годах. Цель имитационного моделирования состоит в воспроизведении поведения исследуемой системы на основе результатов анализа наиболее существенных взаимосвязей между ее элементами или, другими словами, – в разработке симулятора исследуемой предметной области для проведения различных экспериментов.

К имитационному моделированию прибегают, когда:

– дорого или невозможно экспериментировать на реальном объекте;

– невозможно построить аналитическую модель: в системе есть время, причинные связи, последствие, нелинейности, стохастические (случайные) переменные;

– необходимо имитировать поведение системы во времени.

Попробуем проиллюстрировать процесс имитационного моделирования через сравнение с классической математической моделью. При построении математической модели сложной системы может возникнуть ряд трудностей. Модель, как правило, содержит большое число параметров, много связей между элементами и разнообразные нелинейные ограничения, реальные системы зачастую подвержены влиянию случайных различных факторов, учет которых аналитическим путем представляет весьма большие трудности, зачастую непреодолимые при большом их числе. Эти трудности и обуславливают применение имитационного моделирования. Основным преимуществом имитационного моделирования по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как наличие дискретных и непрерывных элементов, нелинейные характеристики элементов системы, многочисленные случайные воздействия и другие, которые часто создают трудности при аналитических исследованиях. В настоящее время имитационное моделирование – наиболее эффективный метод исследования систем, а часто и единственный практически доступный метод получения информации о поведении системы, особенно на этапе ее проектирования.

В имитационном моделировании различают два метода:

– метод статистического моделирования;

– метод статистических испытаний (Монте-Карло).

Метод Монте-Карло – численный метод, который применяется для моделирования случайных величин и функций, вероятностные характеристики которых совпадают с решениями аналитических задач. Состоит в многократном воспроизведении процессов, являющихся реализациями случайных величин и функций, с последующей обработкой информации методами математической статистики.

Если этот прием применяется для машинной имитации в целях исследования характеристик процессов функционирования систем, подверженных случайным воздействиям, то такой метод называется методом статистического моделирования. Метод имитационного моделирования применяется для оценки вариантов структуры системы, эффективности различных алгоритмов управления системой, влияния изменения различных параметров системы. Имитационное моделирование может быть положено в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза систем, когда требуется создать систему с заданными характеристиками при определенных ограничениях.

Области применения имитационного моделирования:

– физические процессы;

– материаловедение;

– нанотехнологии;

– бизнес-процессы;

– производство;

– информационная безопасность и др.

3.1 Статистическое моделирование

Статистическое моделирование – численный метод решения математических задач, при котором искомые величины представляют вероятностными характеристиками какого-либо случайного явления, это явление моделируется, после чего нужные характеристики приближенно определяют путем статистической обработки «наблюдений» модели. В данном методе искомую величину представляют математическим ожиданием числовой функции от случайного исхода явления, т. е. интегралом по вероятностной мере. Проведение каждого «эксперимента» распадается на две части: «розыгрыш» случайного исхода и последующее вычисление функции. Когда пространство всех исходов и вероятностная мера слишком сложны, розыгрыш проводится последовательно в несколько этапов. Случайный выбор на каждом этапе проводится с помощью случайных чисел, например, генерируемых каким-либо физическим датчиком; употребительна также их арифметическая имитация – псевдослучайные числа. Аналогичные процедуры случайного выбора используются в математической статистике и теории игр.

Статистическое моделирование широко применяется для решения на ЭВМ интегральных уравнений, например, при исследовании больших систем. Они удобны своей универсальностью, как правило, не требуют большого объема памяти. Недостаток – большие случайные погрешности, слишком медленно убывающие при увеличении числа экспериментов. Поэтому разработаны приемы преобразования моделей, позволяющие понижать разброс наблюдаемых величин и объем модельного эксперимента.

3.2 Метод Монте-Карло

При существовании теоретического описания метода на протяжении длительного периода времени метод Монте-Карло получил широкое распространение только с появлением ЭВМ, т. е. задача генерации и использования в расчетах случайных величин достаточно трудоемкая задача.

Метод Монте-Карло – общее название группы численных методов, основанных на получении большого числа реализаций стохастического (случайного) процесса, который формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики совпадали с аналогичными величинами решаемой задачи. Название метода происходит от одноименного города в княжестве Монако, где развита игорная индустрия, поскольку наиболее простым механическим устройством для генерации случайных величин является рулетка.

3.2.1 История метода Монте-Карло

Возникновение идеи использования случайных явлений в области приближенных вычислений принято относить к 1878 году, когда появилась работа Холла об определении числа пи с помощью случайных бросаний иглы на разграфленную параллельными линиями бумагу. Существо дела заключается в том, чтобы экспериментально воспроизвести событие, вероятность которого выражается через число и приближенно оценить эту вероятность. Метод Монте-Карло был впервые предложен в 1949 г. Метрополисом и Уламом в статье «Метод Монте-Карло» американского журнала ассоциации статистиков. Создателями метода считают Дж. Неймана и С. Улама. Отечественные работы по методу Монте-Карло появились в 1955–1956 годах. С того времени накопилась обширная библиография по методу Монте-Карло. Даже беглый просмотр названий работ позволяет сделать вывод о применимости метода Монте-Карло для решения прикладных задач из большого числа областей науки и техники.

Первоначально метод Монте-Карло использовался главным образом для решения задач нейтронной физики, где традиционные численные методы оказались мало пригодными. Далее его влияние распространилось на широкий класс задач статистической физики, очень разных по своему содержанию.

Метод Монте-Карло оказал и продолжает оказывать существенное влияние на развитие методов вычислительной математики (например, развитие методов численного интегрирования) и при решении многих задач успешно сочетается с другими вычислительными методами и дополняет их. Его применение оправдано в первую очередь в тех задачах, которые допускают теоретико–

вероятностное описание. Это объясняется как естественностью получения ответа с некоторой заданной вероятностью в задачах с вероятностным содержанием, так и существенным упрощением процедуры решения.

3.2.2 Принципы получения случайных величин на ЭВМ

Наиболее простым механизмом получения случайных величин является рулетка, где неподвижная стрелка в момент остановки вращающегося диска с цифрами указывает на конкретное значение случайной величины.

Циклическим процессом запуска и остановки рулетки с последующим объединением полученных в каждом цикле цифр в группы можно составлять таблицу случайных цифр. Более миллиона цифр содержит самая большая подобная таблица.

Достаточно сложной задачей является получение таблиц случайных чисел. Для создания подобной таблицы необходима ее проверка, поскольку физический прибор генерирует отличные от равномерного распределения случайные числа. При работе с большими таблицами случайных чисел необходим большой объем памяти, который будет занимать соответствующий файл, хранящий данную таблицу.

Наиболее простым решением в данном случае было бы подключение рулетки к ЭВМ. При этом быстродействие генерации случайных чисел значительно снизится. В этой связи наиболее эффективным генератором случайных величин будут являться шумы в электронных лампах при реализации следующего алгоритма: при превышении порогового значения уровня шума четное количество раз разряд будет устанавливаться единица, в противном случае – ноль.

На практике количество генераторов равно сумме разрядов псевдослучайного числа, в которые записываются нули и единицы. При этом на каждом шаге формируется одно полноразрядное число, имеющее равномерное распределение в интервале [0, 1].

Недостатки этого метода генерации:

– Вероятное отсутствие равновероятности нулей и единиц из-за неисправности электронных генераторов шума.

– Невозможность воспроизводимости случайной последовательности чисел с целью проверки работоспособности программы.

3.2.3 Псевдослучайные числа

Применение указанных выше датчиков в ЭВМ является достаточно дорогостоящим, поскольку случайные числа в расчетах используются редко. В качестве решения указанной проблемы возможно использование псевдослучайных чисел. Получение псевдослучайных чисел выполняет ЭВМ на основе алгоритмов и функций, заложенных в математическом описании. Указанные алгоритмы и функции постоянно проверяются, поэтому качество генерации псевдослучайных чисел как правило обеспечивается. Однако, поскольку все действия ЭВМ заранее запрограммированы, псевдослучайные числа, полученные таким образом, трудно назвать случайными. В целях объективного применения псевдослучайных последовательностей необходимо понимать их особенности. Определим сначала, что называется псевдослучайным числом. К таким числам относятся числа, рассчитанные, как правило, по рекуррентной формуле и удовлетворяющие ряду требований, свойственных случайной величине.

Дж. фон Нейман в 1951 г. разработал первый алгоритм создания последовательности псевдослучайных чисел, который называется метод середины квадратов, заключающийся в следующем:

Пусть задано произвольное 4-значное целое число n1 = 5243. При возведении его в квадрат получается 8–значное число n12 = 27489049. Берем 4 средние цифры из этого числа и обозначаем их как n2 = 4890. После возведем уже новое число в квадрат n22 = 23912100 и берем следующие 4 средние цифры. В результате получается число n3 = 9121. Продолжая указанные рекуррентные действия, будем иметь n4 = 1926; n5 = 7094; n6 = 3248 и т. д. Таким образом, псевдослучайная последовательность чисел записывается в следующем виде:

0,5243; 0,4890; 0,9121; 0,1926; 0,7094; 0,3248 и т. д.

Из указанного выше простого алгоритма были созданы более сложные. Однако механизм генерации последовательности псевдослучайных чисел не изменился и заключается в последовательном получении следующего значения из предыдущего.

К преимуществам методов получения псевдослучайных чисел можно отнести:

1. Скорость получения случайных чисел пропорциональна быстродействию работы ЭВМ, поскольку необходимо минимальное количество простых операций для получения псевдослучайного числа.

2. Алгоритмы и программы генерации псевдослучайных чисел очень простые за счет применения рекуррентных формул.

3. Воспроизводимость последовательности псевдослучайных чисел.

4. Возможность постоянного использования последовательности псевдослучайных чисел в однотипных задачах без дополнительных процедур по их аттестации и описания изменения параметров.

3.2.4 Сущность метода Монте-Карло

Сущность метода Монте−Карло состоит в следующем: требуется найти значение a некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно: $M(X) = a$.

Практически же поступают так: производят n испытаний, в результате которых получают n возможных значений X; вычисляют их среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ и принимают $\bar{x}$ в качестве оценки (приближенного значения) a^* искомого числа a:

$$a \approx a^* = \bar{x}. \qquad (1)$$

Поскольку метод Монте-Карло требует проведения большого числа испытаний, его часто называют методом статистических испытаний. Теория этого метода указывает, как наиболее целесообразно выбрать случайную величину X, как найти ее возможные значения. В частности, разрабатываются способы уменьшения дисперсии используемых случайных величин, в результате чего уменьшается ошибка.

Метод Монте-Карло применяется очень часто, порой некритично и неэффективным образом. Он имеет некоторые очевидные преимущества:

1. Он не требует никаких предложений о регулярности, за исключением квадратичной интегрируемости. Это может быть полезным, так как часто случайная величина – очень сложная функция, чьи свойства регулярности трудно установить.

2. Он приводит к выполнимой процедуре даже в многомерном случае, когда численное интегрирование неприменимо, например, при числе измерений, большем 10.

3. Его легко применять при малых ограничениях или без предварительного анализа задачи.

Он обладает, однако, некоторыми недостатками, а именно:

1. Границы ошибки не определены точно, но включают некую случайность. Это, однако, более психологическая, чем реальная, трудность.

2. Статическая погрешность убывает медленно.

3. Необходимость иметь случайные числа.

3.2.5 Оценка погрешности метода Монте-Карло

Пусть для получения оценки a^* математического ожидания M случайной величины X было произведено n независимых испытаний (разыграно n возможных значений X) и по ним была найдена выборочная средняя $\bar{x}$, которая принята в качестве искомой оценки: $a^* = \bar{x}$. Ясно, что если повторить опыт, то будут получены другие возможные значения X, следовательно, другая средняя, а значит, и другая оценка a^*. Уже отсюда следует, что получить точную оценку математического ожидания невозможно. Естественно возникает вопрос о величине допускаемой ошибки. Ограничимся отысканием лишь верхней границы δ допускаемой ошибки с заданной вероятностью (надежностью) γ:

$$P(\left|\overline{X} - a\right| \le \delta) = \gamma\,. \tag{2}$$

Интересующая нас верхняя грань ошибки δ есть «точность оценки» математического ожидания по выборочной средней при помощи доверительных интервалов. Рассмотрим следующие три случая.

1. Случайная величина X распределена нормально и ее среднее квадратичное отклонение σ известно. В этом случае с надежностью γ верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \tag{3}$$

где n – число испытаний (разыгранных значений X); t – значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$, σ – известное среднее квадратичное отклонение X.

2. Случайная величина X распределена нормально, причем ее среднее квадратическое отклонение σ неизвестно. В этом случае с надежностью γ верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}, \tag{4}$$

где n – число испытаний; s – «исправленное» среднее квадратическое отклонение, t_γ находят по табличным значениям.

3. Случайная величина X распределена по закону, отличному от нормального. В этом случае при достаточно большом числе испытаний (n > 30) с надежностью, приближенно равной γ, верхняя граница ошибки может быть вычислена по формуле (3), если среднее квадратическое отклонение σ случайной величины X известно; если же σ неизвестно, то можно подставить в формулу (3) его оценку s – «исправленное» среднее квадратическое отклонение,

либо воспользоваться формулой (4). Заметим, что чем больше n, тем меньше различие между результатами, которые дают обе формулы. Это объясняется тем, что при $n \to \infty$ распределение Стьюдента стремится к нормальному.

Из изложенного следует, что метод Монте-Карло тесно связан с задачами теории вероятностей, математической статистики и вычислительной математики. В связи с задачей моделирования случайных величин (в особенности равномерно распределенных) существенную роль играют также методы теории чисел.

Среди других вычислительных методов метод Монте-Карло выделяется своей простотой и общностью. Медленная сходимость является существенным недостатком метода, однако, могут быть указаны его модификации, которые обеспечивают высокий порядок сходимости при определенных предположениях. Правда, вычислительная процедура при этом усложняется и приближается по своей сложности к другим процедурам вычислительной математики. Сходимость метода Монте-Карло является сходимостью по вероятности. Это обстоятельство вряд ли следует относить к числу его недостатков, ибо вероятностные методы в достаточной мере оправдывают себя в практических приложениях. Что же касается задач, имеющих вероятностное описание, то сходимость по вероятности является даже в какой−то мере естественной при их исследовании.

3.2.6 Применение метода Монте-Карло к моделированию физических процессов

Суть решения физических задач методом Монте-Карло заключается в том, что физическому явлению сопоставляется имитирующий вероятностный процесс, отражающий его динамику (другими словами, каждому элементарному акту процесса сопоставляется некоторая вероятность его осуществления). Затем этот процесс реализуется с помощью набора случайных чисел. Интересующие нас значения физических величин находятся усреднением по множеству реализаций моделируемого процесса.

Основным преимуществом метода Монте-Карло по сравнению с классическими численными методами состоит в том, что с его помощью можно исследовать физические явления практически любой сложности, которые иначе решить просто невозможно. Например, решить уравнения, описывающие взаимодействие двух атомов, будет сравнительно несложно, однако решить такую же задачу для сотни атомов уже не реально. Кроме того, для метода Монте-Карло часто характерна простая структура вычислительного алгоритма. Как правило, составляется программа для осуществления одного случайного испытания (шага модели). Затем это испытание повторяется необходимое число раз, причем каждый последующий шаг не зависит от всех остальных.

Метод Монте-Карло можно также назвать «теоретическим экспериментом». Действительно, если точно известны законы элементарных актов, а вместе с ними и вероятности элементарных событий, результаты, получаемые этим методом, были бы подобны экспериментальным данным.

3.3 Контрольные вопросы

1. Что такое имитационное моделирование?
2. Какие можно выделить виды имитационного моделирования?
3. В каких областях применяется имитационное моделирование?
4. В чем заключается метод статистического моделирования?
5. Расскажите суть метода Монте–Карло.
6. В чем преимущества и недостатки метода Монте– Карло?
7. Что такое псевдослучайные числа?