# 12 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

## 12.1 Ряд распределения

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное заранее не известное значение. Если возможные значения можно пронумеровать, то случайная величина называется дискретной, если значением случайной величины может быть любое действительное число в заданном диапазоне, то случайную величину называют непрерывной.

К дискретным величинам можно отнести число попаданий в цель, число очков при бросании кости, число сгоревших радиоэлементов в приборе и т. д. К непрерывным величинам можно отнести координаты точки попадания, ошибку прибора, время работы устройства и т. п.

Условимся в дальнейшем случайные величины обозначать большими буквами, а их конкретные значения – соответствующими малыми буквами. Рассмотрим, например, дискретную случайную величину X, которая может принимать значения

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

с вероятностью

$$p_1, p_2, ..., p_n.$$

Так как события $X = x_i$, $(i = 1, ..., n)$ несовместимы, то они образуют полную группу и сумма вероятностей всех возможных событий равна, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Эта суммарная вероятность каким-то образом распределена между отдельными значениями. Для полного описания данной случайной величины нужно задать её закон распределения.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения может быть задан в виде таблицы (ряда распределения):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
| P | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

или в виде графика (многоугольника распределения):

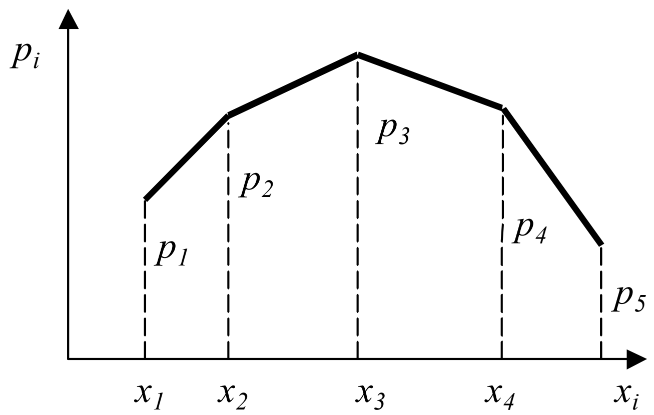



Рисунок 1 – Многоугольник (полигон) дискретного распределения

Для изображения распределения дискретной случайной величины применяют также столбчатые диаграммы (см. рисунок 2).

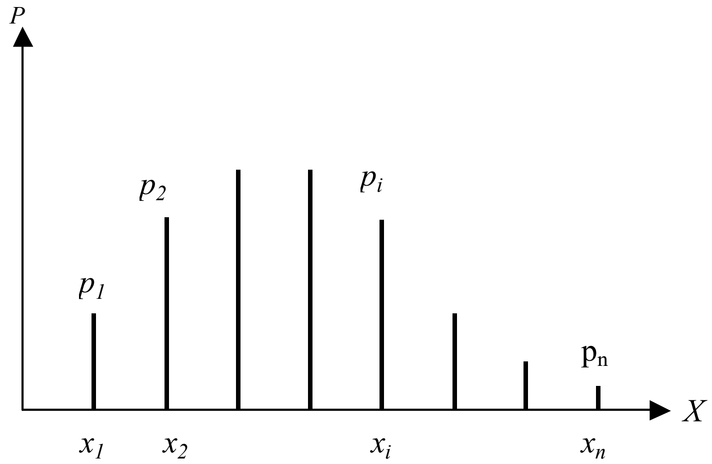
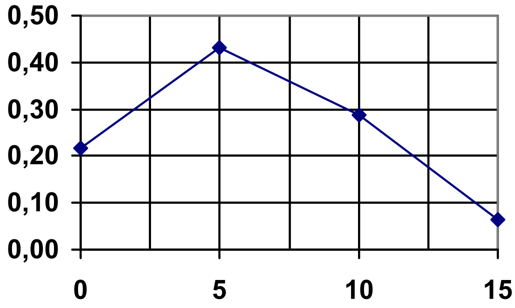



Рисунок 2 – Столбчатая (решетчатая ) диаграмма распределения дискретной случайной величины

Пример. Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. Построить ряд распределения числа выбитых очков.

Решение. Обозначим X – число выбитых очков. Значения: $x_1 = 0,\quad x_2 = 5,\quad x_3 = 10,\quad x_4 = 15.$ Их вероятности находим по теореме о повторении опытов:

$$p_1 = 0{,}6^3 = 0{,}216;$$
$$p_2 = C_3^1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432;$$
$$p_3 = C_3^2 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288;$$
$$p_4 = 0{,}4^3 = 0{,}064.$$




## 12.2 Функция распределения

Для непрерывных величин удобнее пользоваться не рядом распределения, а функцией распределения случайной величины, т. е. вероятностью события X>x, где x – некоторая текущая переменная.

$$F(x) = P(X < x). \qquad (1)$$

Функцию распределения иногда называют интегральным законом распределения. Она существует для любых случайных величин – как непрерывных, так и дискретных.

Общие свойства:

Функция распределения F(x) есть неубывающая функция своего аргумента, т. е. при $x_2 > x_1 \quad F(x_2) \geq F(x_1)$.

$$F(-\infty) = 0.$$

$$F(+\infty) = 1.$$

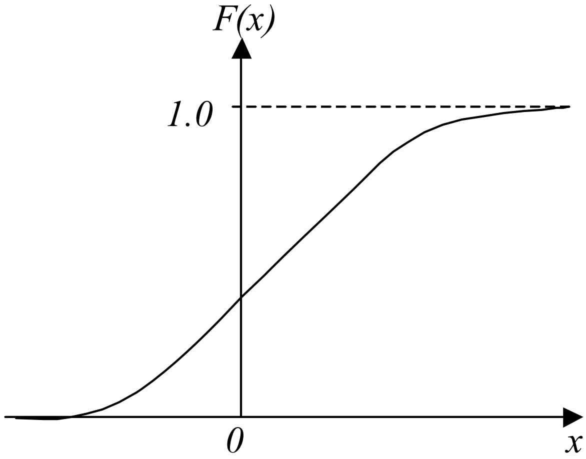



Рисунок 3 – Пример графика функции распределения

Пример. Производится три независимых опыта. Случайная величина X – число появлений события A в опыте. Дан ряд распределения. Найти функцию распределения.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,25 | 0,4 | 0,15 | 0,2 |

$x \le 0 \quad F(x) = 0;$

$0 < x \le 1 \quad F(x) = 0{,}25;$

$1 < x \le 2 \quad F(x) = 0{,}65;$

$2 < x \le 3 \quad F(x) = 0{,}8;$

$3 < x \quad F(x) = 1.$

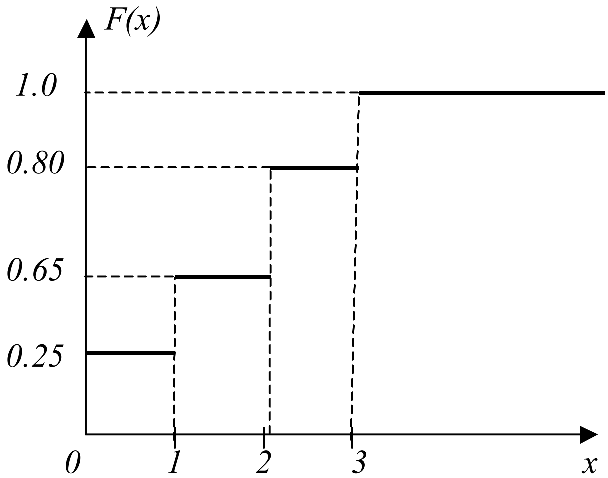



Рисунок 4 – Пример интегральной функции распределения дискретной случайной величины

Обычно функция распределения непрерывной случайной величины представляет собой непрерывную функцию.

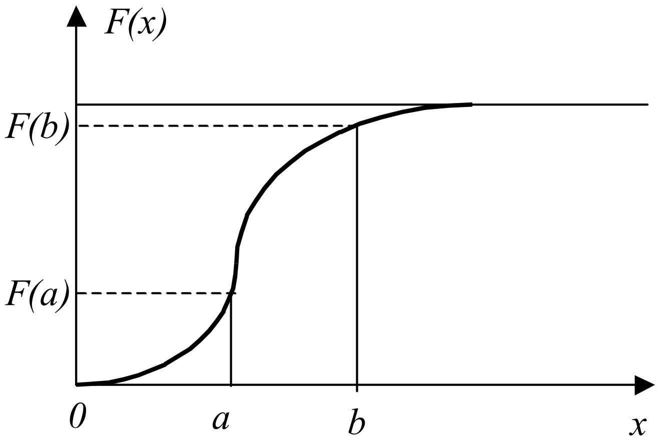



Рисунок 5 – Пример графика распределения непрерывной случайной величины

Пусть дана функция распределения случайной величины X. Нужно определить вероятность попадания на заданный участок.

$$a \le X < b.$$

Эта вероятность

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Рассмотрим три события:

$$A - X < b,$$
$$B - X < a,$$
$$C - a \le X < b.$$

Учитывая, что A=B+C по теореме сложения вероятностей имеем.

$$P(A) = P(B) + P(C),$$
$$P(X < b) = P(X < a) + P(a \le X < b),$$
$$F(a) = F(b) + P(a \le X < b),$$
$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

т.е. вероятность попадания случайной величины на заданный участок равна приращению функции распределения на этом участке.

Пусть $a = b$, тогда $F(a) = F(b)$ и $P(a \le X < a) = 0$. Вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины рана 0.

## 12.3 Плотность распределения

Пусть имеется непрерывная случайная величина X с функцией распределения F(x), которую мы предположим непрерывной и дифференцируемой. Вычислим вероятность её попадания на участок от x до x+Δx:

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$

Уменьшая Δx, в пределе получим производную.

Введём обозначение $f(x) = F'(x)$. $f(x)$ – производная функции распределения характеризует плотность, с которой распределены значения случайной величины в данной точке. Она называется плотностью распределения (плотностью вероятности) непрерывной случайной величины. Кривая, изображающая плотность, называется кривой распределения.

Рассмотрим непрерывную случайную величину X с плотностью распределения f(x) и элементарный участок dx, примыкающий к точке x. Вероятность попадания случайной величины в участок от x до x+dx равна f(x)dx.

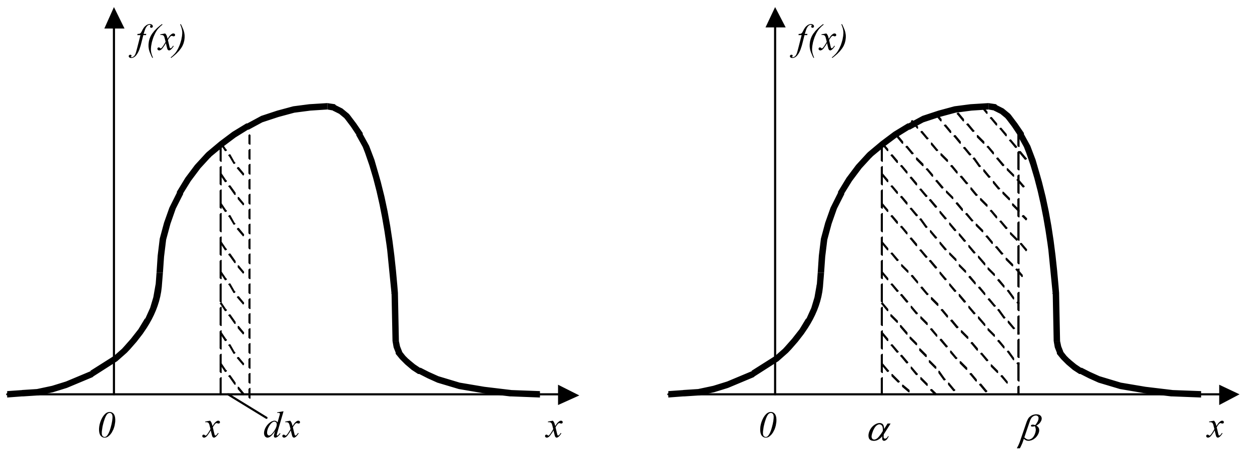



Рисунок 6 – Графики плотности распределения непрерывной случайной величины

Выразим вероятность попадания величины X на отрезок от α до β.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (2)$$

Геометрически это есть площадь под кривой распределения.

Выразим функцию распределения через плотность.

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x),$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{3}$$

Геометрически F(x) есть площадь кривой распределения левее точки x.

Основные свойства плотности распределения:

– плотность распределения есть положительная функция. $f(x) \geq 0.$

– интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения =1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{4}$$

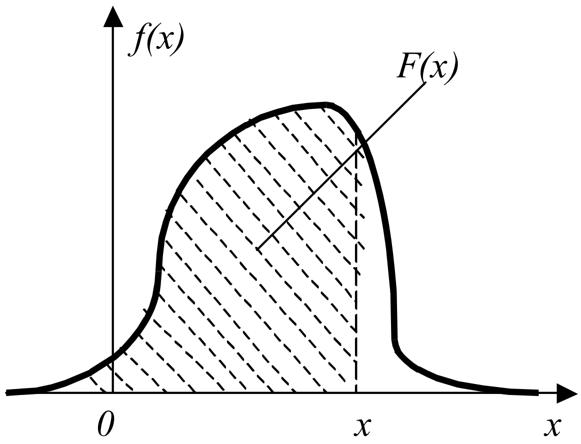



Рисунок 7 – Иллюстрация к формуле (3)

Пример. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью:

$$f(x) = a\cos x \text{ при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \tag{3.5}$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x < -\frac{\pi}{2} \quad \textit{или} \quad \frac{\pi}{2} < x.$$

Найти коэффициент a, построить график плотности распределения f(x). Найти функцию распределения F(x) и построить её график. Найти вероятность попадания величины X на участок от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Решение. График плотности f(x):

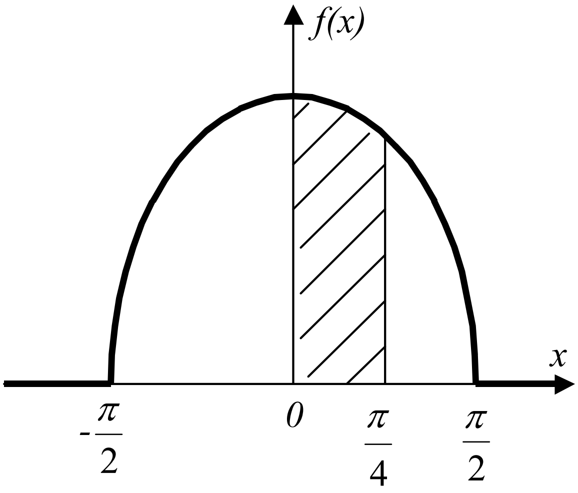



Рисунок 8 – График плотности распределения (5)

По свойству плотности распределения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx = 2a = 1.$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \textit{при} \quad x < -\dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{2}(\sin x + 1) \quad \textit{при} \quad -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1 \quad \textit{при} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

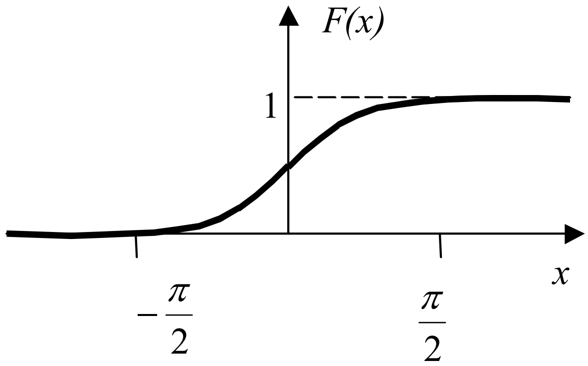



Рисунок 9 – График функции распределения (6)

Вероятность попадания в интервал от 0 до $\frac{\pi}{4}$:

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

## 12.4 Контрольные вопросы

1. Что такое случайная величина?
2. Чему равна сумма вероятностей всех возможных событий?
3. Что такое закон распределения случайной величины?
4. Что такое функция распределения случайной величины?
5. Укажите основные свойства функции распределения.
6. Что такое плотность распределения случайной величины?
7. Укажите основные свойства плотности распределения.